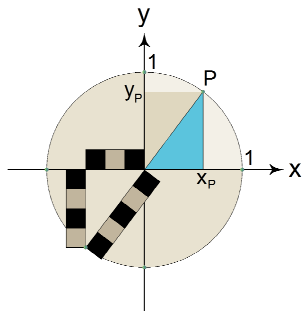




Kreis- und Kugelgleichung

Die griechische Briefmarke illustriert den **Lehrsatz des Pythagoras** anhand seiner kleinsten ganzzahligen Lösung.

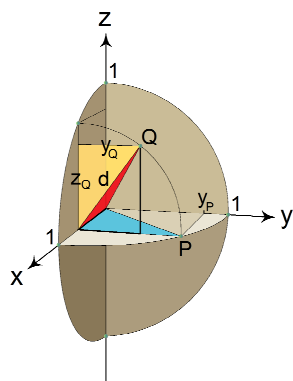
Ein Dreieck mit Seitenlängen 3, 4 und 5 ist rechtwinklig, weil die Quadrate der kürzeren Seiten zusammen das Quadrat der längsten Seite ergeben, d. h.: $3^2 + 4^2 = 5^2$, oder allgemein: $a^2 + b^2 = c^2$.



Die **Kreisgleichung** $x^2 + y^2 = r^2$ ist eine verallgemeinerte Darstellung des Lehrsatzes auf einem ebenen *kartesischen Koordinatensystem*, in dem die x- und die y-Achse senkrecht aufeinander stehen.

Bei einem festgelegten Radius r definiert jede der unendlich vielen Lösungen der Gleichung einen Punkt des entsprechenden Kreises.

Im **Einheitskreis** mit dem Radius $r = 1$ ist z. B. der Punkt P mit den Koordinaten $x_P = 0,6$ und $y_P = 0,8$ eine Lösung: $0,6^2 + 0,8^2 = 1^2$



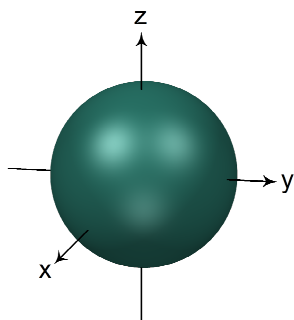
Für die **Kugelgleichung** muss das ebene Koordinatensystem durch eine senkrecht auf dieser Ebene stehende z-Achse zu einem räumlichen Koordinatensystem erweitert werden.

Um von P nach Q zu kommen, muss man das blaue Dreieck um die x-Achse drehen, wodurch seine rote Unterseite sichtbar wird.

Wegen $x_P = x_Q$ und $|y_P| = |d|$ gilt für das rote Dreieck: $x_Q^2 + d^2 = 1^2$

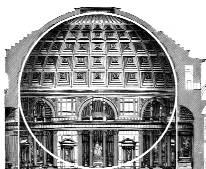
Wenn man den Satz des Pythagoras auf das rechtwinklige gelbe Dreieck anwendet, erhält man die Gleichung: $y_Q^2 + z_Q^2 = d^2$

Setzt man das Ergebnis für d^2 in die vorherige Gleichung ein, erhält man die Gleichungsform der Einheitskugel: $x_Q^2 + y_Q^2 + z_Q^2 = 1^2$



Man kann die Gleichung für die Einheitskugel so umstellen, dass auf der rechten Seite der Gleichung eine Null steht: $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$

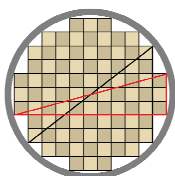
Zur Eingabe in das **SURFER-Programm** muss man die Exponenten (die Zahlen im oberen Index) durch vorangestellte Dach-Symbole (^) kennzeichnen. Somit lautet die Gleichung: $x^{\wedge}2 + y^{\wedge}2 + z^{\wedge}2 - 1 = 0$
Als Visualisierung gibt das Programm dann eine Kugel aus (links).



Eine vergleichsweise handfestere Überprüfung der Kugelgleichung ist mit dem **Pantheon-Kugelmodell** möglich.

Die Ecken der hölzernen Quader, die von der schwarzen Kreislinie des beweglichen Bügels gestreift werden, entsprechen ganzzahligen Lösungen der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 65^2$.

Wenn man die x- und y-Werte einer solchen Ecke am horizontalen Zentimeterraster abzählt, dann können die vertikalen z-Werte mit der Gleichung $z = \sqrt{65^2 - x^2 - y^2}$ berechnet und nachgemessen werden.



Das Modell ist vom *Römischen Pantheon* (ca. 120 n. Chr.) inspiriert, einerseits, da in dessen Innenraum exakt eine Kugel einbeschrieben werden kann, und andererseits wegen eines sehr bemerkenswerten Musters auf dem Fußboden. Dort sind 89 Quadrate so in den Grundrisskreis eingefügt, dass er von 16 Eckpunkten berührt wird.

Die exakte Konstruktion beruht auf der Gleichung $11^2 + 3^2 = 9^2 + 7^2$.