

Geraden, Kurven und Kuspen

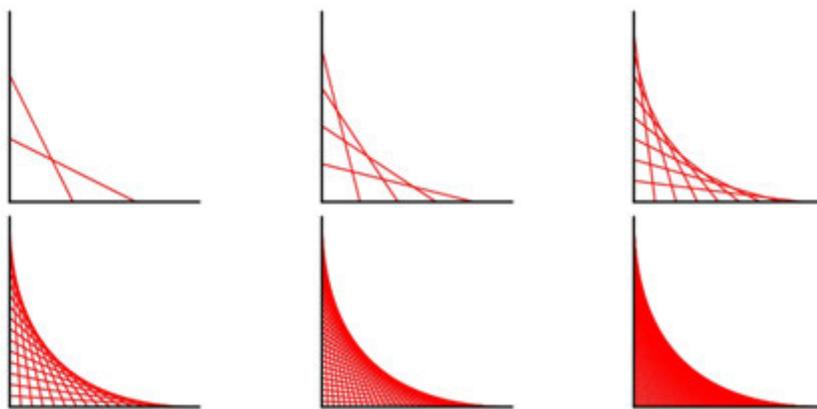
Duco van Straten

11. Januar 2008

Was haben eine Plattenbausiedlung, ein Schwimmbad, eine Teetasse, ein zufällig hingeworfenes Handtuch, moderne Kunst aus 1930, ein Schiffbruch, der Regenbogen und schwarze Löcher miteinander zu tun?

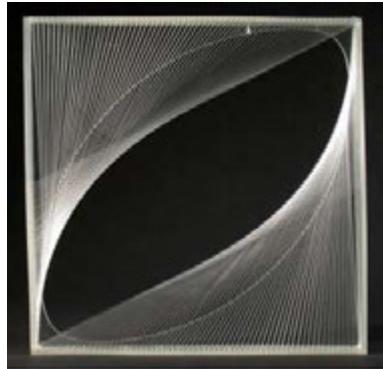
1 Geraden und Hüllkurven

Es mag paradox erscheinen, aber es ist durchaus möglich mit Hilfe von *Geraden* eine *gebogene Kurve* zu erzeugen. Fast jeder wird in seiner Schulzeit, in einer Stunde der Langeweile vielleicht, in einem karierten Heft nachfolgende Linien gezogen haben.



Unverkennbar ist die Tatsache, dass die Geraden eine gewisse Kurve umhüllen, die man *Hüllkurve* nennen könnte.

Dieselbe Idee wird vielen in Form vielleicht gar selbstgebastelten *Fadenkonstruktionen* geläufig sein. In der Kunst wurde die Idee der Hüllkurve auf vielfältige Weise umgesetzt.

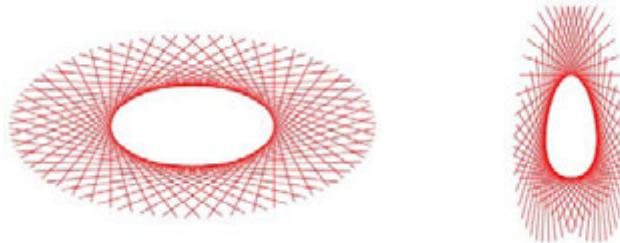


NAUM GABO, Linear Construction

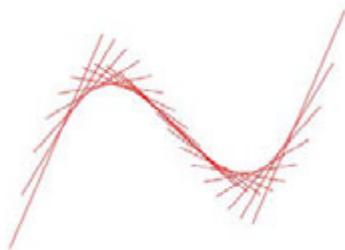
In oben stehendem Bild sehen wir eine Fadenkonstruktion von NAUM GABO aus dem Jahre 1932. Die Geraden umhüllen eine sanft gebogene Kurve.

2 Hüllkurven und Tangenten

Eigentlich lässt sich *jede Kurve* als von Geraden eingehüllt auffassen, nämlich durch ihre *Tangenten*.



Wie berechnet man nun mal wieder eine Tangente?



Wenn die Kurve durch eine Funktionsvorschrift $y = f(x)$ gegeben ist, so wird die Gerade durch die Punkte $(x, y) = (a, f(a))$ und $(b, f(b))$ gegeben durch

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

Lässt man nun b gegen a laufen, so strebt der Differenzenquotient

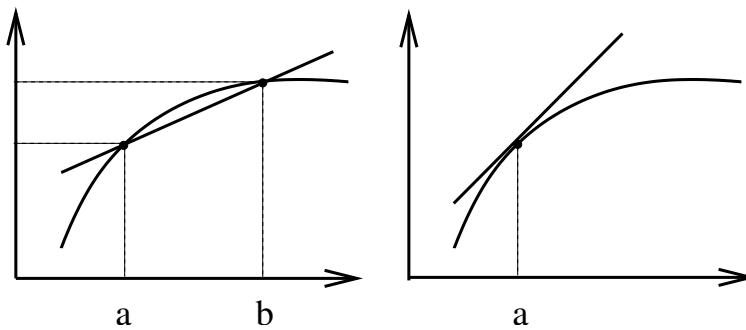
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

beim Grenzübergang $b \rightarrow a$ genau die *Ableitung* von f im Punkt a an

$$f'(a) := \lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

und die Gerade geht über in die Tangente an der Kurve in $(a, f(a))$:

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$



Die zweite binomische Formel

$$(b^2 - a^2) = (b + a)(b - a)$$

besagt, dass für die quadratische Funktion $f(x) = x^2$ der Differenzenquotient

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = b + a$$

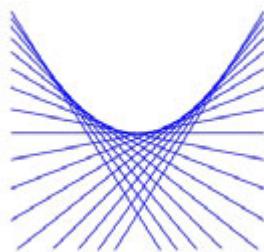
ist. Somit ist

$$f'(a) = \lim_{b \rightarrow a} (b + a) = 2a$$

Die Tangente an der Parabel $y = x^2$ im Punkt (a, a^2) wird also gegeben durch die Gleichung

$$y = 2a(x - a) + a^2$$

Zeichnet man für verschiedene a diese Geraden, so finden wir die Parabel als Hüllkurve ihrer Tangenten wieder.



3 Fronten, Strahlen und Evoluten

Wirft man einen kleinen Stein ins Wasser, so wird die Wasseroberfläche in Bewegung gesetzt und man kann beobachten, wie sich kreisförmige Wellenfronten von Zentrum fortbewegen.

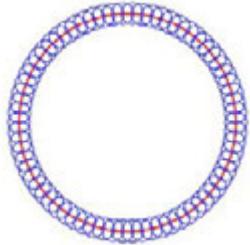


Den äußersten Rand dieser Erregung nennt man *Wellenfront*. Der holländische Mathematiker CHRISTIAAN HUYGENS beschrieb rein geometrisch das Phänomen der Wellenausbreitung.

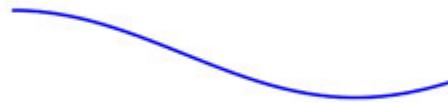


CHRISTIAAN HUYGENS, 1629-1695.

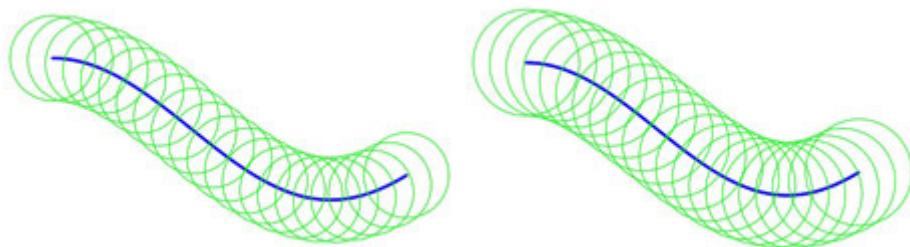
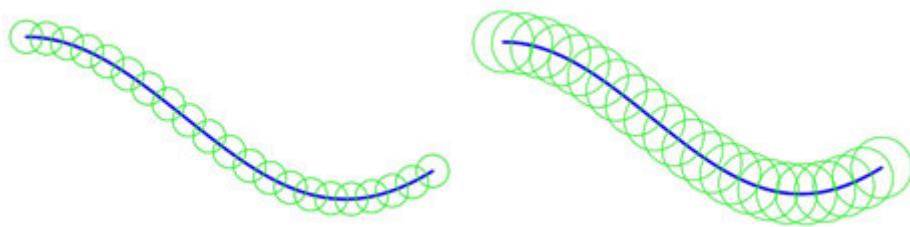
Er stellte sich die Punkte der Wellenfront als *Quellen* von weiteren sekundären Wellen vor, welche sich kreisförmig ausbreiten.



Wir können mit einer beliebigen Front anfangen und anschauen, wie sie sich entwickelt.

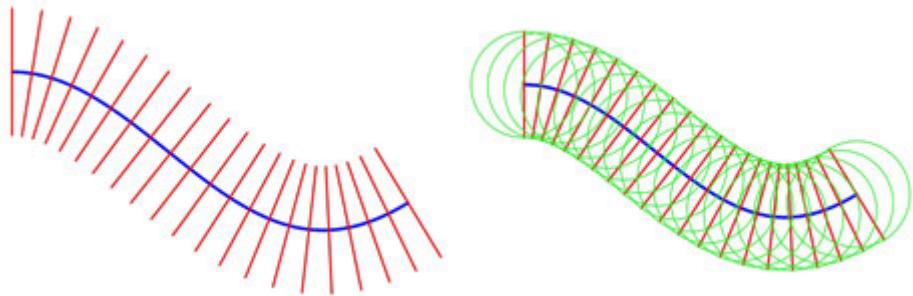


Anfangsfront



Weiterentwicklung der Front

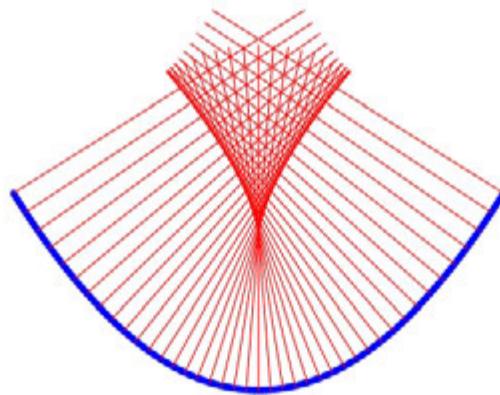
Aus der Überlagerung dieser sekundären Kreiswellen entsteht dann die neuen Wellenfront als Hüllkurve. Senkrecht zu den Wellenfronten verlaufen *Strahlen*, die angeben in welche Richtung sich die Wellen ausdehnen.



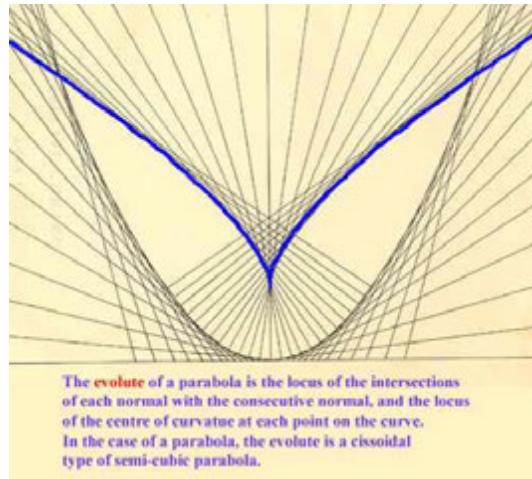
Dies beschreibt die Fortbewegung von Wellenfronten mit Hilfe von Strahlen: wir müssen lediglich in jedem Punkt der Front den entsprechenden Strahl *senkrecht* zu der Front einzeichnen. Die Punkte der neuen Front entstehen dann aus den alten, indem wir die Punkte über einen gewissen Abstand in eine der beiden Richtungen der Senkrechten verschieben. Man nennt dies das *Prinzip von HUYGENS*.

Das Geniale von HUYGENS Idee ist die allgemeine Anwendbarkeit. Sie gilt für Wasserwellen, aber gleichermaßen für Schall-, Licht- und Radio-Wellen.

Ganz allgemein wird das Strahlensystem zu einer Front eine Hüllkurve erzeugen. Huygens nannte dies die *Evolute* der Front. Unten ist die Evolute einer Parabel abgebildet.

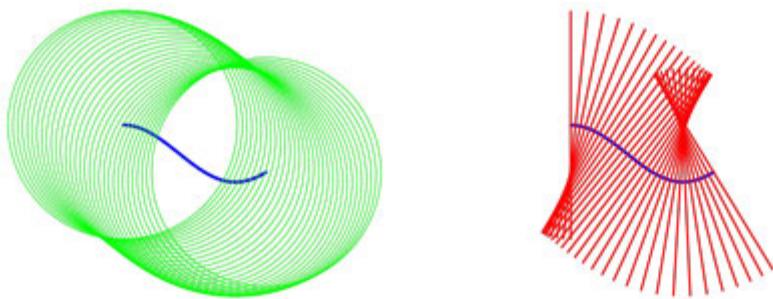


Und hier noch eine schöne Darstellung, wobei die Parabel selbst auch als Hüllkurve seiner Tangenten dargestellt ist.

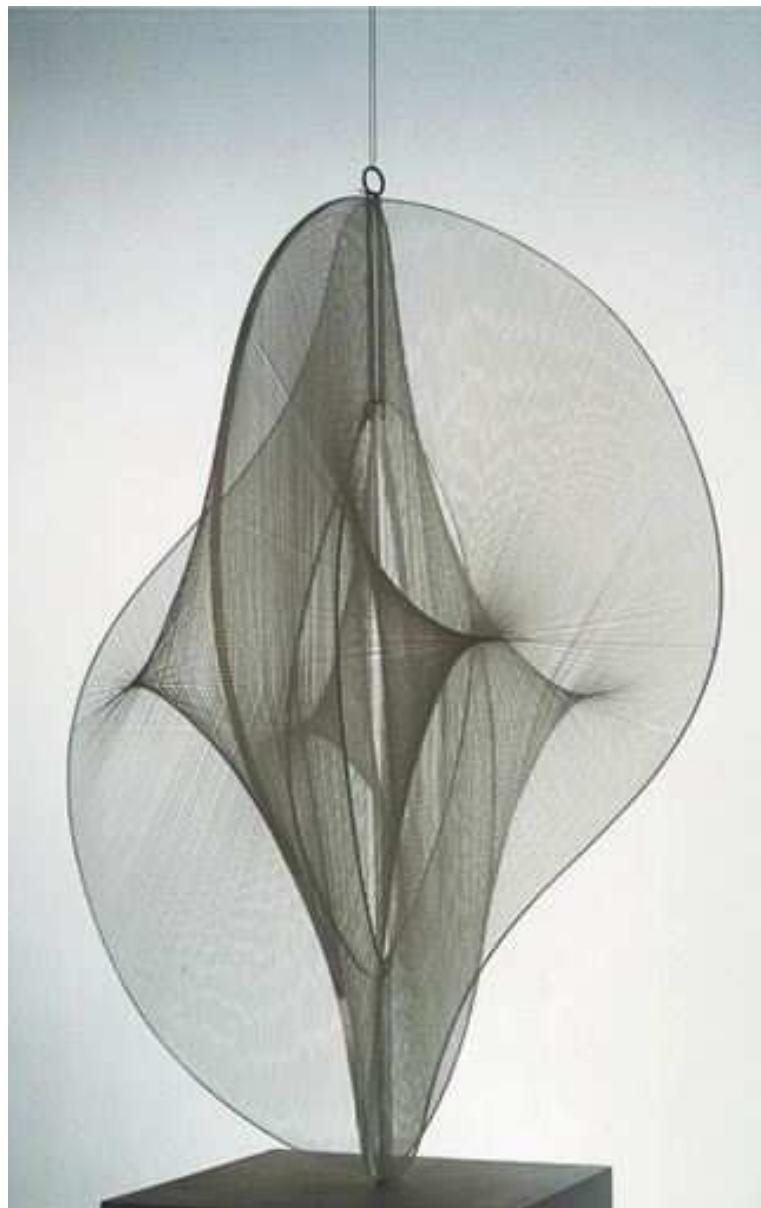


Auffällig ist dabei, dass die Hüllkurve einen *besonderen Punkt* aufweist, wo die Kurve nicht glatt verläuft, sondern in sich zurückzulaufen scheint. Man nennt einen solchen Punkt auch *Spitze* oder auch *Kuspe*.

Dies ist ein ganz allgemeines Phänomen und hat wenig mit der spezifischen Form der Parabel zu tun. Dies ist was passiert, wenn wir die Wellen im obigen Beispiel weiter laufen lassen.

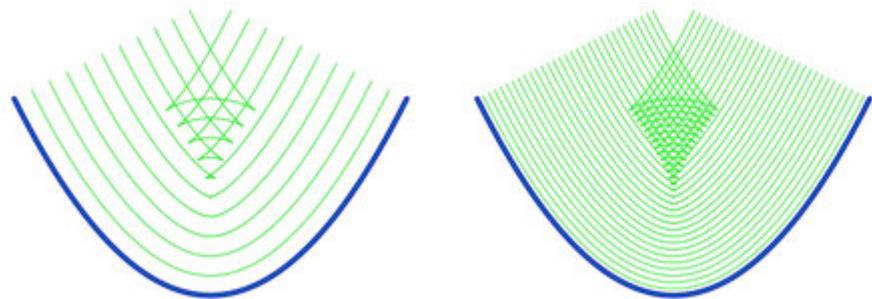


Solche Kuspen kann man auch bei NAUM GABO beobachten



NAUM GABO,
Linear Construction Nr.2.

Erreicht die Wellenfront die Evolute, so ändert sich das Aussehen der Fronten dramatisch. Beim Überschreiten der Kuspe entwickeln die Fronten selber zwei Kuspen, die sich längs der Evolute bewegen!



Fronten der Parabel

4 Kaustiken

Hüllkurven von Strahlensystemen werden allgemein mit dem Begriff *Kaustik* angedeutet, was soviel wie *Brennkurve* bedeutet. Im Hinblick auf das Prinzip von HUYGENS ist das im Falle von Licht zutreffend. Es ist genau dort, wo sich die Strahlen sammeln und die Wellenenergie sich konzentriert. Kaustiken spielen deswegen in der Optik eine entscheidende Rolle und sind bei fast allen optischen Vorgängen die herausragenden Merkmale.

Der Legende nach hat der Mathematiker ARCHIMEDES dies bei der Belagerung von Syrakus durch die Römer benutzt. Mit Hilfe von Parabolspiegeln setzte er die Segel der feindlichen Schiffe in Brand.

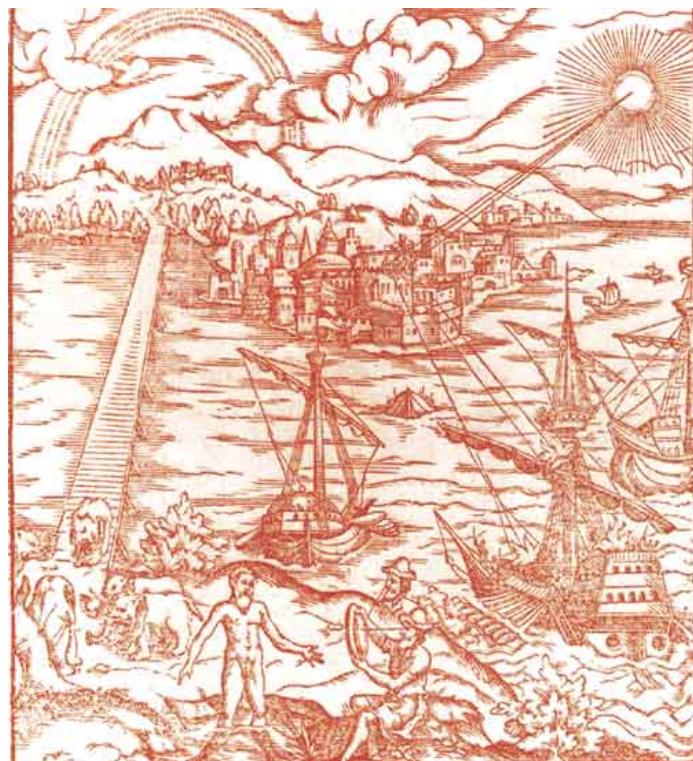


Der Gelehrte ALHAZEN war einer der ersten, die sich systematisch mit den optischen Eigenschaften von Spiegeln und Linsen beschäftigt hat.



ABU ALI AL-HASAN IBN AL-HAITHAM, 965-1040

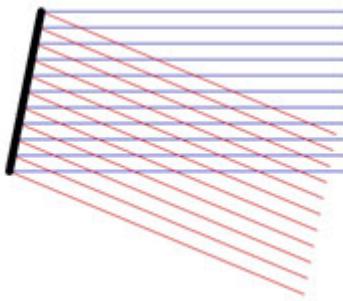
Die Titelseite seiner „*Thesaurus Opticus*“, zeigt uns nochmals die Archimedeslegende.



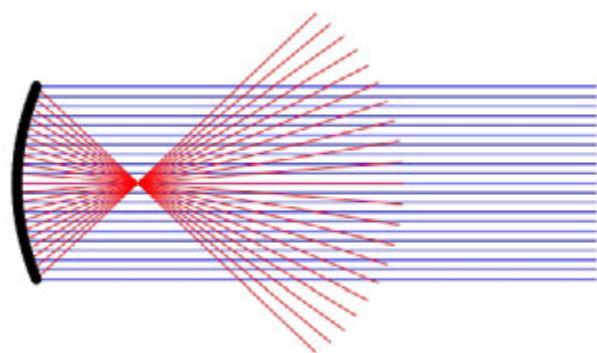
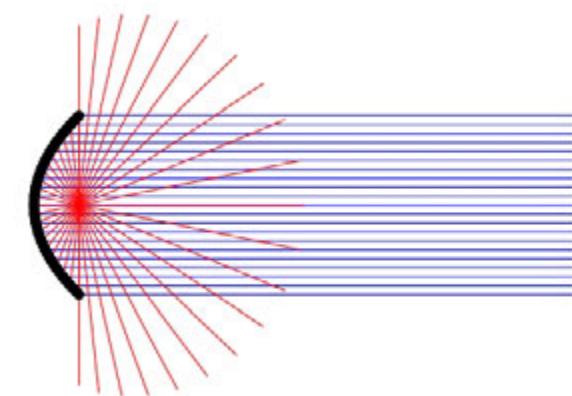
5 Kataktaustiken

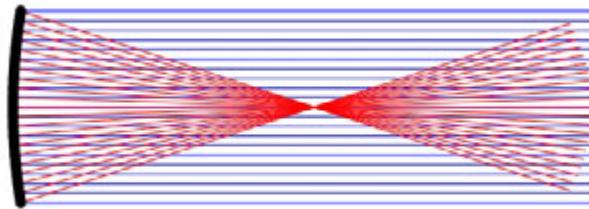
Trifft ein Strahl auf eine reflektierende Fläche, so ändert der Strahl seine Richtung gemäss dem Gesetz “Austrittswinkel gleich Eintrittswinkel”. Fällt

ein Bündel parallel einfallender Lichtstrahlen auf einen flachen Spiegel, so bilden die reflektierten Strahlen wieder ein paralleles Lichtbündel.



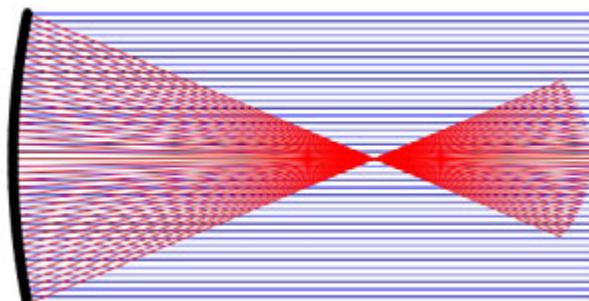
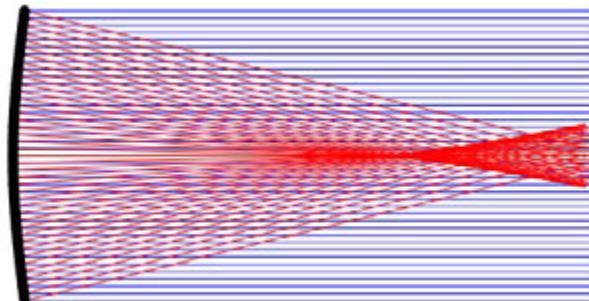
Ein perfekter Parabolspiegel führt ein paralleles Strahlenbündel im Brennpunkt zusammen.

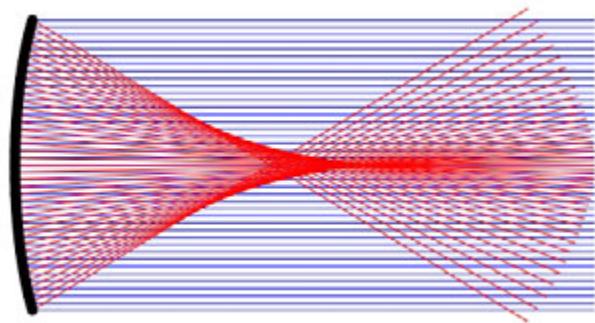




Beachte, je stärker die Krümmung der Spiegel, je kürzer ist der Abstand vom Brennpunkt zum Spiegel.

Ist das einfallende Strahlenbündel nicht genau parallel oder weicht der Spiegel von der Parabelform ab, so entsteht eine Brennkurve mit Kuspe, welche den idealen Brennpunkt ersetzt.





Mit dem Auge ist die Abweichung vom idealen Parabolspiegel kaum auszumachen, aber die Auswirkungen sind dramatisch. Die genaue Ausrichtung der Kuspe hängt von der Art der Abweichung von der Parabolform ab.

Parabolspiegel werden als Solarkocher und für Satelittenempfang genutzt.



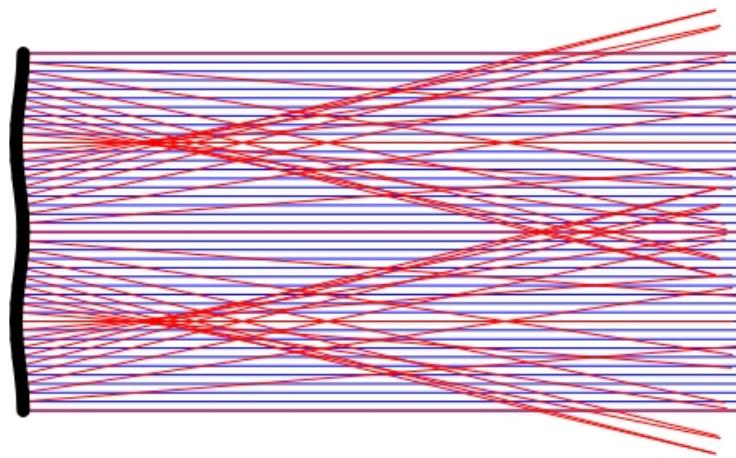
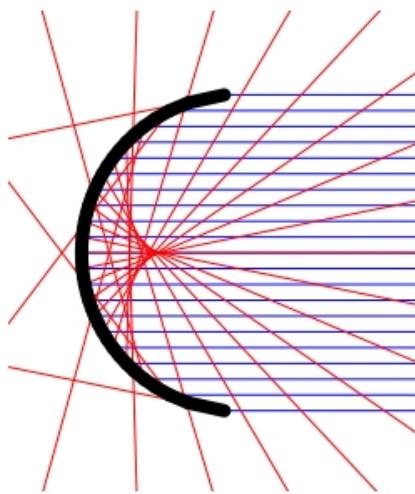


Hier sehen wir die grosse praktische Bedeutung der Kuspe: auf der Kaustik ist dies der Punkt, wo die Intensität der Wellenenergie am grössten ist, also maximale Temperatur oder Empfangsqualität sichert.

Eine der bekanntesten Kaustiken ist wohl die, welche man an sonnigen Tagen in seiner Kaffeetasse beobachten kann.



Es ist die Kaustik eines halbkreisrunden Spiegels:



Spiegelung an eine gewellte Fläche



Solar Grill

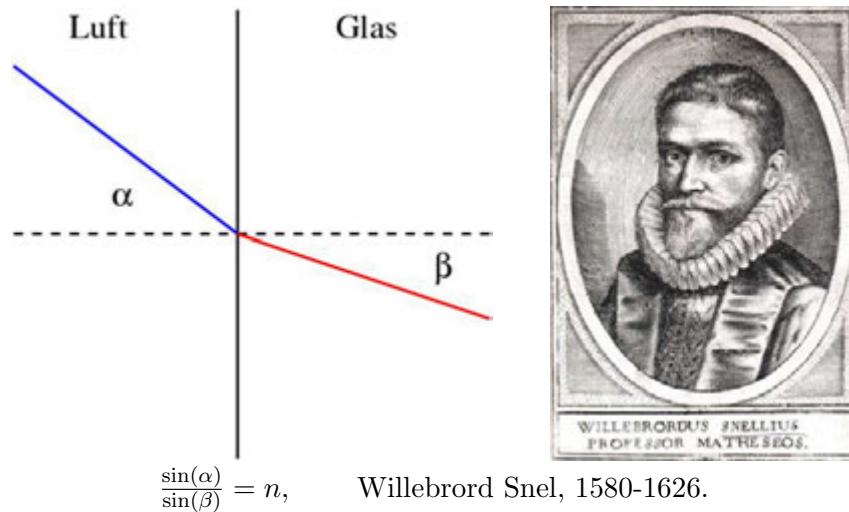
Kaustiken von Strahlen, welche an Spiegeln reflektiert wurden, werden als *Katakaustiken* bezeichnet.

6 Diakaustiken

Unter *Brechung* versteht man die Richtungsänderung von Strahlen bei dem Durchgang an einer Grenzfläche, wie zum Beispiel zwischen Luft und Wasser, oder Luft und Glas.



Die Strahlen folgen dabei dem SNELLSchen Gesetz, genannt nach dem holländischen Mathematiker WILLEBRORD SNEL



$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = n$$

Hierbei ist n eine Konstante, der sogenannte *Brechungsindex*; für den Übergang Luft-Glas beträgt sie etwa 1.5.

Bei einer perfekten Linse werden alle Strahlen eines parallelen Strahlenbündels durch einen einzigen *Brennpunkt* geführt.

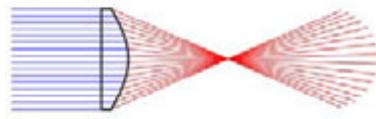


LEONARD EULER,

, 1707-1783.

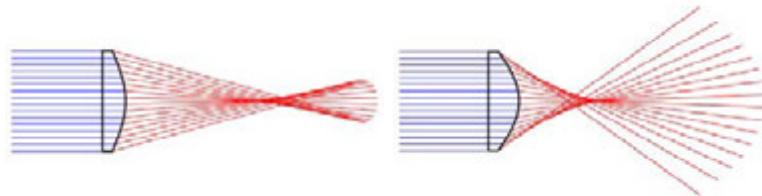
Die ideale Linse hat nicht die Parabolform und auch nicht die Kreisbogenform. Der Mathematiker EULER hat die Formel für die Form einer perfekten Linse mit Brennpunktsabstand F und Brechungsindex n gefunden. Sie lautet

$$y = \frac{F}{1+n} \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{1+n}{1-n} \right) \left(\frac{x}{F} \right)^2} \right)$$



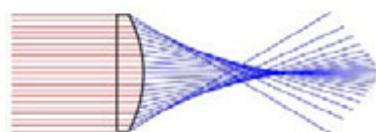
Perfekte Linse

Bei nicht parallelen Bündeln oder realen Linsen entsteht wieder eine Brennkurve mit Kuspe. Die Position der Kuspe ersetzt dann den idealen Brennpunkt.



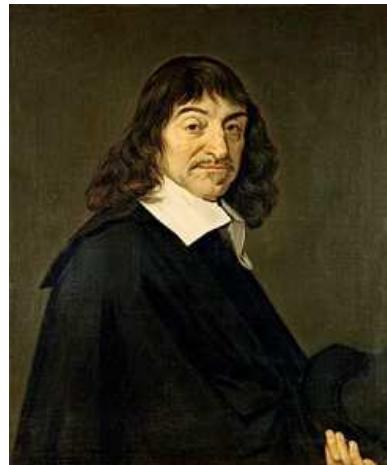
Kleine Störungen einer perfekten Linse

In welcher Richtung der Kuspe zeigt, hängt auch hier von der genauen Form der Störung ab. Unten die Kaustik einer kreisbogenförmige Linse.



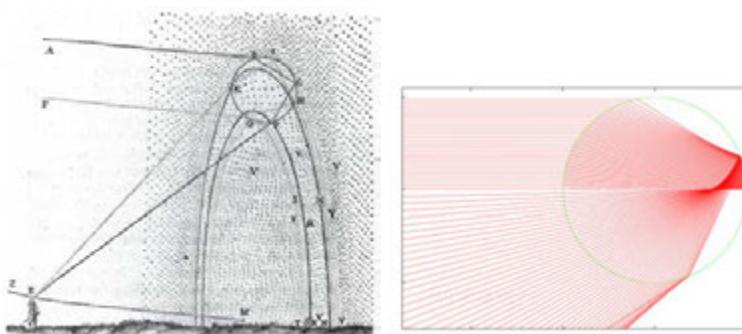
Sphärische Linse

Zu den spektakulärsten Kaustiken gehört gewiss der *Regenbogen*. Der Mathematiker RENÉ DESCARTES hat erstmals eine schlüssige Erklärung gegeben:



RENE DESCARTES 1596 -1650

Durch zweimalige Brechung und Reflektion in einem Wassertropfen werden die Lichtstrahlen auf ein Hüllkurve fokussiert, welche unter einem Winkel von etwa 42^0 mit den Eingangs strahlen austretet.



7 Whitney's Handtuch

Warum sieht man überall in so verschiedenen Situationen Kurven mit Kuspen auftreten? Ein zufällig hingeworfenes Handtuch gibt den entscheidenden Hinweis.

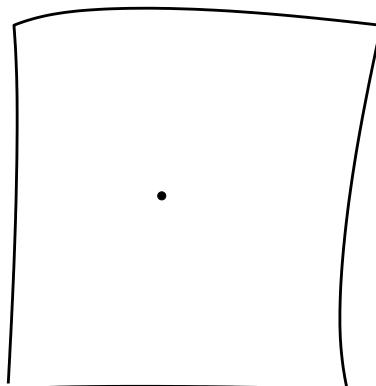


Der Mathematiker HASSLER WHITNEY (1907-1989) überlegte und fragte sich: die Punkte des Handtuchs kann ich mir als eine Fläche vorstellen. Die Punkte des Bodens bilden eine zweite Fläche. Durch den Wurf des Handtuchs werden alle Punkten der erste Fläche auf die zweite abgebildet.

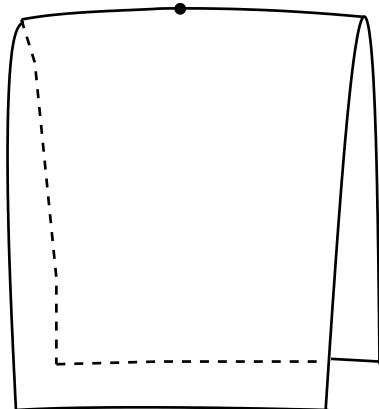
Was kann eigentlich alles bei Abbildung einer Fläche auf eine andere passieren?

Er stellte fest, dass es, allgemein gesprochen, nur **drei Arten von Punkten** gibt:

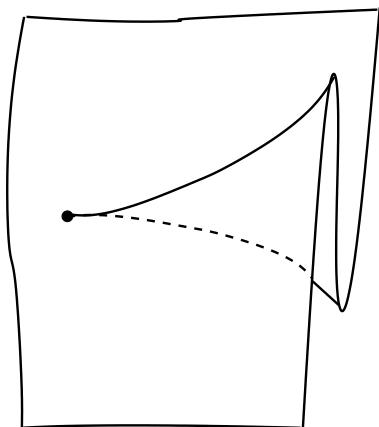
Die meisten Punkte des Handtuchs landen einfach "flach" auf dem Boden. Dies nannte er Punkte vom Typ *I*, oder *reguläre Punkte*.



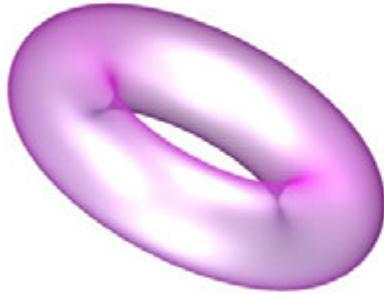
Dann gibt es Punkte, an den Stellen das Handtuch "gefaltet" wird. Diese Punkte bilden eine Kurve, die sogenannte *Faltpkurve*. Diese Punkte vom Typ *II* nannte er Faltpunkte.



Diese Faltkurve kann an gewissen Punkten scheinbar verschwinden. In Wirklichkeit aber läuft sie weiter, wird aber verdeckt durch die obere Schicht des Handtuchs. Wäre das Handtuch durchscheinend, so könnten wir beobachten, wie die Faltkurve spezielle Punkte besitzt, welche auf einer Kuspe abgebildet werden! Diese bilden die Punkte von Typ *III*.



Das Tolle an Whitneys Einsicht ist, dass sie natürlich nicht nur für Handtücher gilt. Ganz allemein, wenn man eine Fläche auf eine andere abbildet erwartet man diese drei Arten von Punkten.



Torus-Projektion mit vier Kuspen

Ein Abbildung von $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ wird beschrieben durch zwei Funktionen in zwei Variablen, $\Phi(s, t) = (f(s, t), g(s, t))$. Hierbei sind s und t Koordinaten in der ersten Ebene. Die Koordinaten der zweiten Ebene sind x und y . Der Punkt (s, t) wird also abgebildet auf den Punkt mit $x = f(s, t)$, $y = g(s, t)$. Die drei Arten von Punkten werden durch *Normalformen* beschrieben.

Typ	Name	Normalform
I.	regulär	$\Phi(s, t) = (s, t)$
II.	Falt	$\Phi(s, t) = (s^2, t)$
III.	Kusp	$\Phi(s, t) = (s^3 - st, t)$

Allgemein kann man die Faltkurve von $\Phi(s, t) = (f(s, t), g(s, t))$ durch das Verschwinden der *Funktionaldeterminante* finden:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial s} & \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial g}{\partial s} & \frac{\partial g}{\partial t} \end{vmatrix} = 0$$

Die Faltkurve für den Normalform *III* ist also

$$0 = \begin{vmatrix} 3s^2 - t & -s \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3s^2 - t$$

Für die Punkte der Faltkurve gilt also $t = 3s^2$. Unter der Abbildung wird der Punkt $(s, 3s^2)$ der Faltkurve auf den Punkt $(-2s^3, 3s^2)$ abgebildet. Für das Bild der Faltkurve gilt also die Gleichung

$$27x^2 - 4y^3 = 0.$$

Diese Kurve ist auch als NEILsche Parabel bekannt.

8 Berechnung von Hüllkurven

Mit der allgemeinen Idee der Faltkurve ist es nun möglich, auf einfache Weise die Gleichung von Evoluten und allgemeineren Hüllkurven herzuleiten.

Betrachten wir eine Kurve gegeben durch eine Parameterdarstellung

$$t \longrightarrow (x(t), y(t))$$

Die Richtung der Tangente ist dann gegeben durch

$$(x'(t), y'(t))$$

Die Senkrechte ist

$$(-y'(t), x'(t))$$

Ein Punkt auf der Senkrechten hat dann die Form

$$(x(t) - s \cdot y'(t), y(t) + s \cdot x'(t))$$

Die Faltkurve ist gegeben durch

$$0 = \begin{vmatrix} -y'(t) & x'(t) - s \cdot y''(t) \\ x'(t) & y'(t) + s \cdot x''(t) \end{vmatrix} = -(x'(t)^2 + y'(t)^2) + s(x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t))$$

Also

$$s = \frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}$$

Durch Einsetzen erhalten wir auf diese Weise eine Parametrisierung der Evolute.

Eine Parabel mit der Gleichung $y = cx^2$ wird durch (t, ct^2) parametrisiert und wir finden

$$s = (1 + (2ct)^2)/2c$$

und die Parametrisierung der Evolute wird

$$(t - 2ct(1 + (2ct)^2)/2c, ct^2 + (1 + (2ct)^2)/2c) = (4c^2t^3, 1/(2c) + 3ct^2)$$

Die Gleichung der Evolute lautet

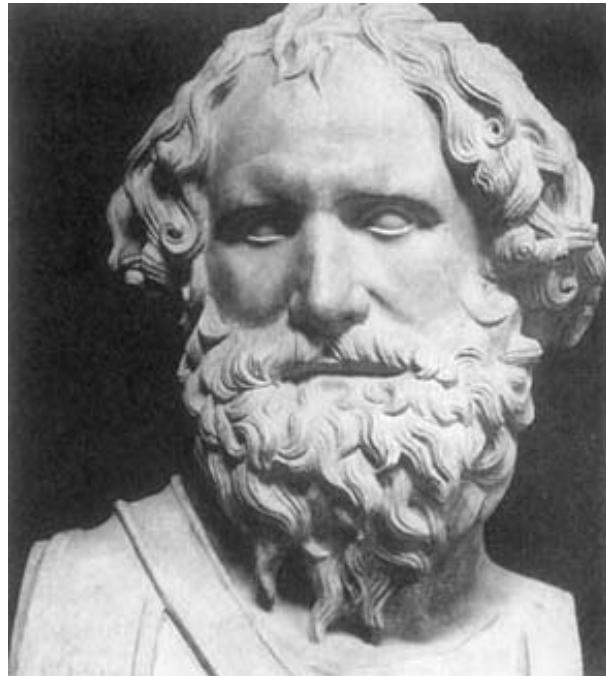
$$16c(y - (1/(2c))^2 = 27x^3$$

Die Kuspe liegt im Punkt

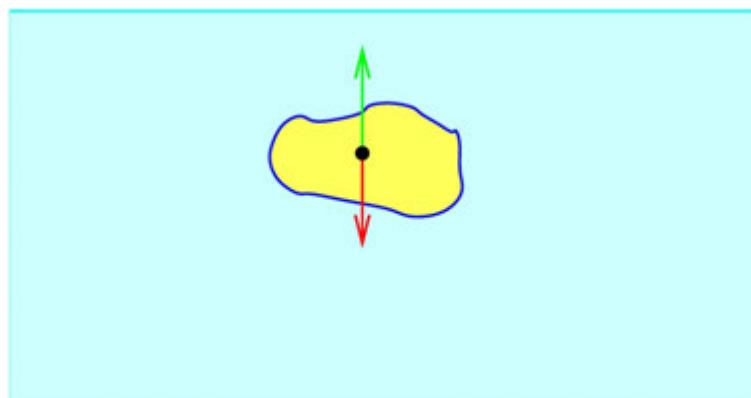
$$(0, \frac{1}{2 \cdot c})$$

9 Schiffbruch

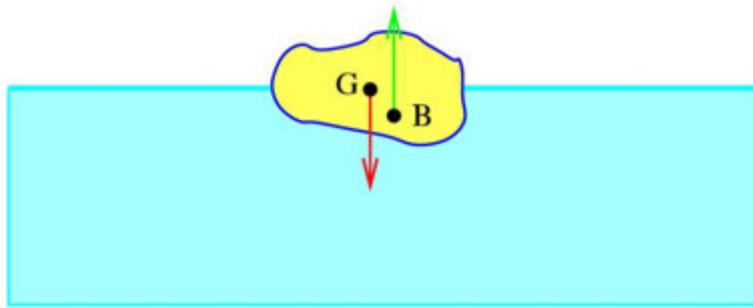
ARCHIMEDES war der erste, der systematische Untersuchungen zur Stabilität von schwimmenden Körpern gemacht hat.



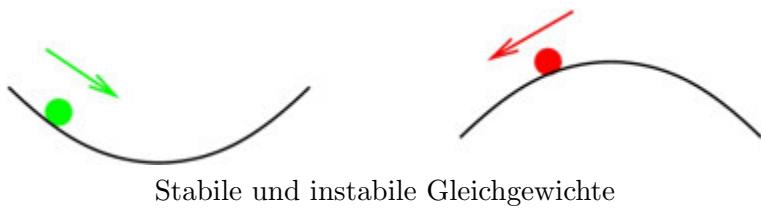
ARCHIMEDES, 287-212.



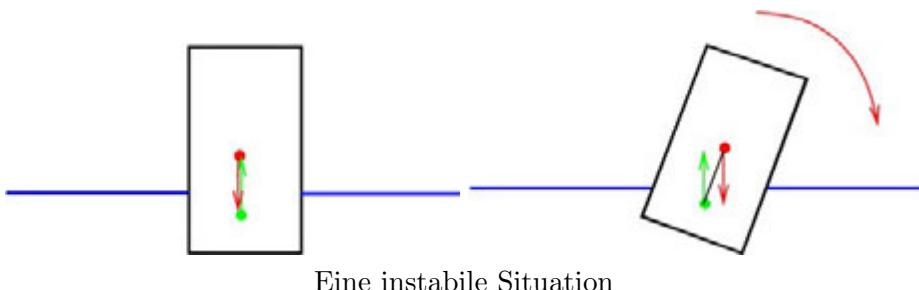
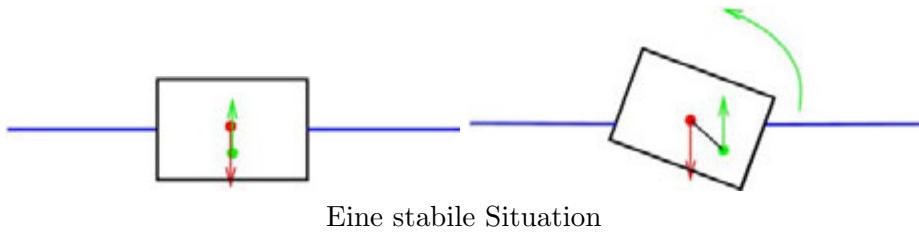
Auf einen schwimmenden Körper wirken zwei Kräfte. Erstens ist da die Schwerkraft, welche wir uns im Schwerpunkt G des Körpers angeheftet denken können. Zweitens gibt es den Auftriebskraft, welche der Grösse der Schwerkraft des verdrängten Wassers gleich ist, aber in entgegengesetzter Richtung wirkt. Diese Kraft können wir uns im Schwerpunkt B des verdrängten Wassers denken.



In einer Gleichgewichtslage heben diese zwei Kräfte sich gegenseitig auf. Ganz allgemein gesprochen kann so eine Gleichgewichtslage *stabil* oder *instabil* sein.

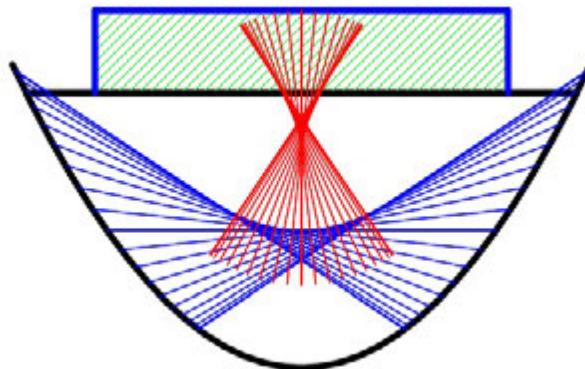


Ist ein schwimmender Körper in geneigter Lage, so bilden diese zwei Kräfte einen *Moment*, welcher eine Drehung um den Mittelpunkt von B und G bewirkt. Es hängt jetzt von der Richtung dieser Drehung ab, ob der Körper wieder aufrichten oder in die Horizontale gezwungen wird.



Dies alles ist natürlich von grosser praktischer Bedeutung für die Schifffahrt. Für die Stabilitätsanalyse stellt es sich heraus, dass es von Vorteil ist, die Situation vom Schiff aus zu betrachten.

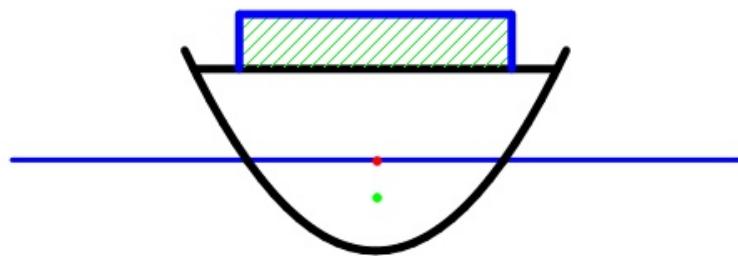
Je nach Schieflage ändert sich die Wasserlinie. Das sich unter Wasser befindende Volumen bleibt jedoch konstant. Der Schwerpunkt B , wo die Auftriebskraft angreift, verschiebt sich und bewegt sich über eine gewisse Kurve C .



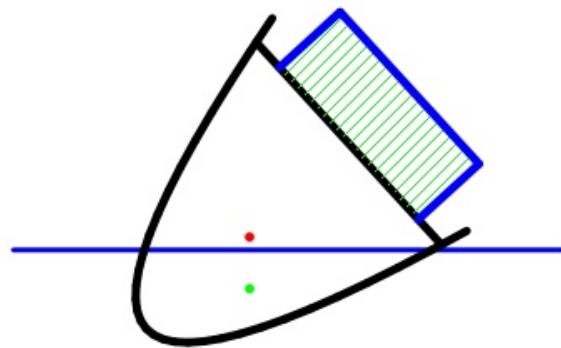
Das Metazentrum

Die Stabilität des Schiffes wird nun bestimmt durch Position des Schiffs schwerpunktes bezüglich die Senkrechten an C . Die Hüllkurve dieser Normalen, die Evolute von C , spielt also eine entscheidende Rolle.

Im allgemeinen sieht C aus wie eine Parabel, und die Evolute weist eine Kuspe auf. Der Kuspen-Punkt heißt auch *Metazentrum* M . Liegt der Schwerpunkt G unter dem Metazentrum M , so ist das Schiff stabil.



Liegt der Schwerpunkt G über dem Metazentrum M , so verliert das Schiff seine Stabilität und wird eine geneigte Lage einnehmen.

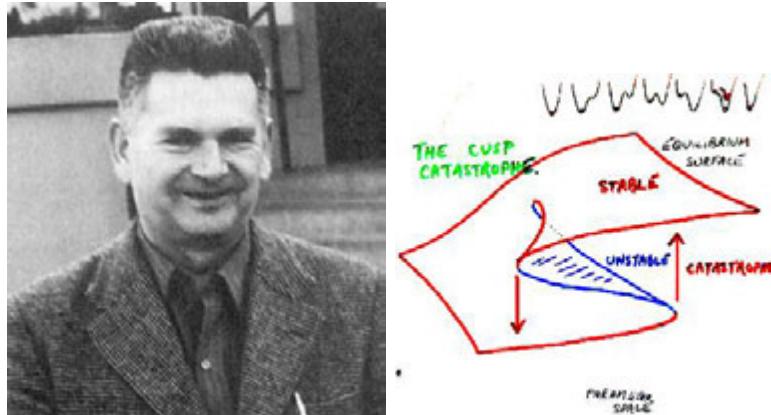


Durch eine kleine Anhebung des Schwerpunkt kann ein Schiff also plötzlich instabil werden. Genau das ist bei der Wasa passiert.



In der *Katastrophentheorie* des Mathematikers RENE THOM studiert man

allgemein, wie kleine Parameteränderungen zu plötzliche Änderungen von Gleichgewichtslagen führen können. Hier oben haben wir es mit der *Kuspka-tastrophe* zu tun.



Rene Thom, 1923-2002

Für einen treibenden Holzblock ist es relativ einfach die Rechnungen genau auszuführen. Sei h die Höhe des Blocks, wovon ein Teilstück a unter Wasser ist, und sei b die Breite. Nach dem *Prinzip von Archimedes* gilt für schwimmende Körper

$$\rho_1 \cdot h \cdot b = \rho_2 \cdot a \cdot b$$

oder

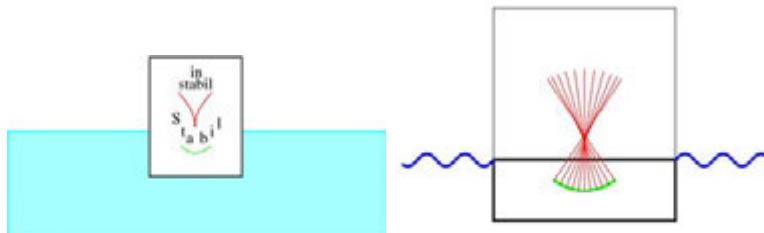
$$a = \rho \cdot h$$

mit $\rho := \rho_1 / \rho_2$ das Verhältnis der Dichte ρ_1 des Blocks und ρ_2 des Wassers.



Der Schwerpunkt B des verdrängten Wassers bewegt sich auf einer Parabel mit der Gleichung

$$y = \frac{1}{2}a + \frac{6a}{b^2}x^2$$



Somit liegt das Metazentrum

$$\frac{b^2}{12a}$$

über dem Schwerpunkt des Unterwasserteils. Der Block kann also stabil treiben, wenn

$$\frac{1}{2}h < \frac{1}{2}a + \frac{b^2}{12a}$$

Mit $a = \rho \cdot h$ folgt durch Umstellung

$$h < \rho h + \frac{b^2}{6\rho h}$$

also

$$6 \cdot (1 - \rho) \cdot \rho \cdot h < b^2$$

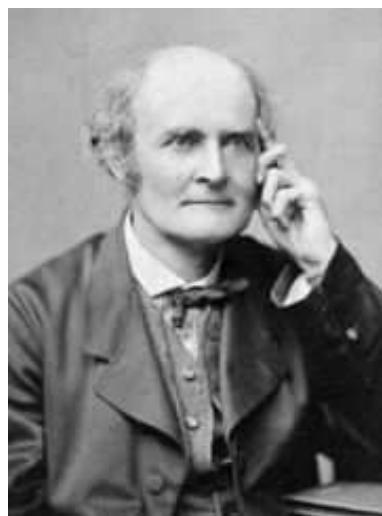
oder

$$h < \frac{b}{\sqrt{6\rho(1 - \rho)}}$$

10 Räumliche Kaustiken

Bis jetzt haben wir Strahlensysteme in der Ebene betrachtet und gesehen, wie im Allgemeinen Hüllkurven Kuspen als Singularitäten aufweisen. Strahlensysteme im dreidimensionalen Raum erzeugen *Hüllflächen*, auch *Brennflächen* genannt.

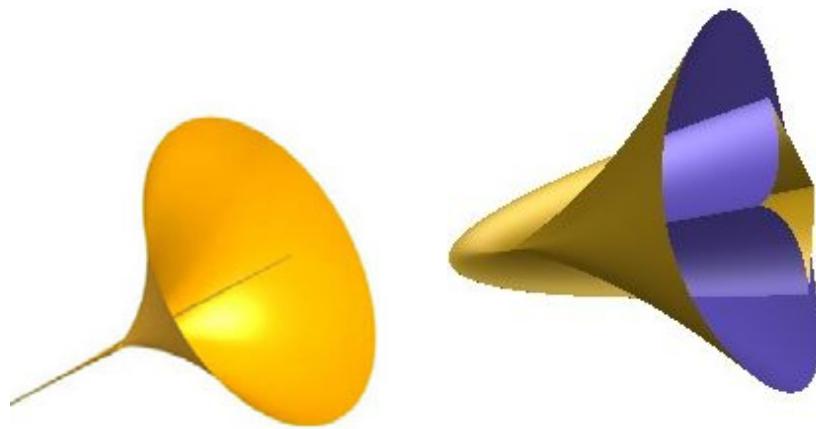
Die Evolute des Paraboloids $z = ax^2 + by^2$ wurde erstmals von dem Mathematiker ARTHUR CAYLEY beschrieben.



Arthur Cayley, 1821-1895

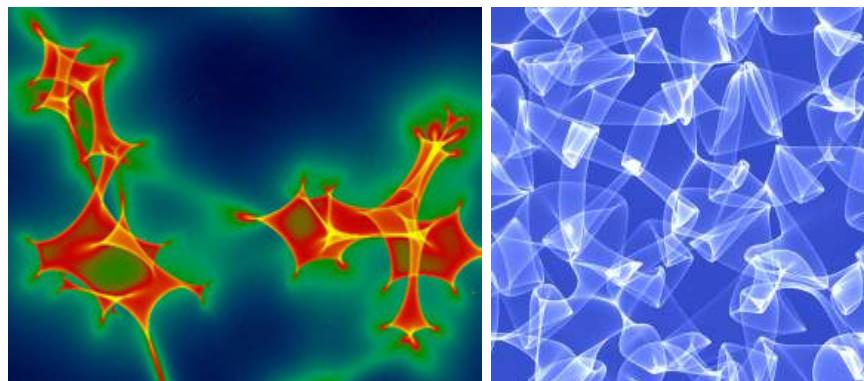
Die Gleichung lautet:

$$\begin{aligned}
& (256a_6b_9)*x_6z_3 + (768a_7b_8)*x_4y_2z_3 + (768a_8b_7)*x_2y_4z_3 + (256a_9b_6)*y_6z_3 + (-432a_5b_9)*x_8+ \\
& (1728a_6b_8)*x_6y_2+(-2592a_7b_7)*x_4y_4+(-1728a_8b_6)*x_2y_6+(-432a_9b_5)*y_8+(-384a_5b_9)*x_6z_2+ \\
& -384a_7b_7-768a_6b_8)*x_4y_2z_2+(-768a_8b_6-384a_7b_7)*x_2y_4z_2+(-384a_9b_5)*y_6z_2+(-768a_7b_7+15 \\
& 6a_6b_8-768a_5b_9)*x_4z_4+(5376a_8b_6-10752a_7b_7+5376a_6b_8)*x_2y_2z_4+(-768a_9b_5+1536a_8b_6-768a_7b_7)*y_4z_4+ \\
& (1296a_6b_7-2592a_5b_8+1488a_4b_9)*x_6z+(-8208a_7b_6+16800a_6b_7-8016a_5b_8)*x_4y_2z_5+ \\
& (-8016a_8b_5+16800a_7b_6-8208a_6b_7)*x_2y_4z+(1488a_9b_4-2592a_8b_5+1296a_7b_6)*y_6z+(384a_7b_6+84a_6b_7-1920a_5b_8+1152a_4b_9)*x_4z_3+ \\
& (-5376a_8b_5+5376a_7b_6+5376a_6b_7-5376a_5b_8)*x_2y_2z_3+(1152a_9b_4-25704a_6b_6+21504a_5b_7-5832a_4b_8)*x_4y_2+ \\
& (-5832a_8b_4+21504a_7b_5-25704a_6b_6+9936a_5b_7)*x_2y_4+(-32a_9b_3-648a_8b_4+1296a_7b_5-648a_6b_6)*y_6+(-1296a_7b_5+4608a_6b_6-7200a_5b_7+5760a_4b_8-1872a_3b_9)*x_4z_2+ \\
& (-2112a_8b_4+16512a_7b_5-28800a_6b_6+16512a_5b_7-112a_4b_8)*x_2y_2z_2+(-1872a_9b_3+5760a_8b_4-7200a_7b_5+4608a_6b_6-1296a_5b_7)*y_4z_2+(-768a_8b_4+920a_7b_5-3840a_5b_7+3840a_4b_8-1152a_3b_9)*x_2z_4+ \\
& (-1152a_9b_3+3840a_8b_4-3840a_7b_5+5120a_6b_6-3840a_5b_7+1536a_4b_8-256a_3b_9)*z_6+(1296a_7b_4-5184a_6b_5+8064a_5b_6-5664a_4b_7+1392a_3b_8+96a_2b_9)*x_4z+(1728a_8b_3-6528a_7b_4+480 \\
& 0a_6b_5+4800a_5b_6-6528a_4b_7+1728a_3b_8)*x_2y_2z+(96a_9b_2+1392a_8b_3-5664a_7b_4+8064a_6b_5-5184a_5b_6+1296a_4b_7)*y_4z+(624a_8b_3-2208a_7b_4+3600a_6b_5-4800a_5b_6+5520a_4b_7-3744a_3b_8+1008a_2b_9)*x_2z_3+ \\
& (1008a_9b_2-3744a_8b_3+5520a_7b_4-4800a_6b_5+3600a_5b_6-2208a_4b_7+624a_3b_8)*y_2z_3+(384a_9b_2-1920a_8b_3+3456a_7b_4-1920a_6b_5-1920a_5b_6+3456a_4b_7-1920a_3b_8+384a_2b_9)*z_5+(-324a_7b_5+1296a_6b_4-1944a_5b_5+1248a_4b_6-228a_3b_7-48a_2b_8)*x_4+ \\
& (-1161a_8b_2+6102a_7b_3-13623a_6b_4+1764a_5b_5-13623a_4b_6+6102a_3b_7-1161a_2b_8)*x_2y_2+(-48a_8b_2-228a_7b_3+1248a_6b_4-1944a_5b_5+1296a_4b_6-324a_3b_7)*y_4+(-648a_8b_2+3600a_7b_3-9144a_6b_4+13440a_5b_5-11640a_4b_6+5328a_3b_7-840a_2b_8-96ab_9)*x_2z_2+ \\
& (-96a_9b_2-840a_8b_2+5328a_7b_3-11640a_6b_4+13440a_5b_5-9144a_4b_6+3600a_3b_7-64a_2b_8)*y_2z_2+(-192a_9b_2+576a_8b_2+384a_7b_3-3648a_6b_4+5760a_5b_5-3648a_4b_6+384a_3b_7+576a_2b_8-92ab_9)*z_4+(324a_8b_2-1944a_7b_2+5004a_6b_3-6960a_5b_4+5340a_4b_5-1944a_3b_6+84a_2b_7+96ab_8)*x_2z_3+ \\
& +(96a_8b_2+84a_7b_2-1944a_6b_3+5340a_5b_4-6960a_4b_5+5004a_3b_6-1944a_2b_7+324ab_8)*y_2z+(32a_9+96a_8b_2-960a_7b_2+1984a_6b_3-1152a_5b_4-1152a_4b_5+1984a_3b_6-960a_2b_7+96ab_8+32b_9)*z_3+(-54a_8+34a_7b_2-810a_6b_2+1056a_5b_3-714a_4b_4+180a_3b_5+42a_2b_6-24ab_7)*x_2+(-24a_7b+42a_6b_2+180a_5b_3-74a_4b_4+1056a_3b_5-810a_2b_6+324ab_7-54b_8)*y_2+(-48a_8+144a_7b+96a_6b_2-912a_5b_3+1440a_4b_4-91a_3b_5+96a_2b_6+144ab_7-48b_8)*z_2+(24a_7-120a_6b_2+216a_5b_2-120a_4b_3-120a_3b_4+216a_2b_5-120ab_6)*z+(-4a_6+24a_5b_2-60a_4b_2+80a_3b_3-60a_2b_4+24ab_5-4b_6)
\end{aligned}$$



Die Evolute für $a = b$ und für $a = 1/5, b = 1/7$.

Brennflächen im Dreiraum besitzen im Allgemeinen komplizierte Singularitäten, aber der Schnitt einer solchen Brennfläche mit einer Ebene sieht genau so aus wie eine Brennkurve in der Ebene, obwohl sie ja ganz anders entsteht. Wo man hinguckt, in die Tiefen des Weltalls



Kaustiken verursacht durch Schwerkraftslinsen, Kaustiken im Schwimmbad

oder auf den Boden eines Schwimmbads, überall findet man Kaustiken mit den auffälligen Kuspen!