

$$\text{Zitrus } x^2 + z^2 = y^3(1-y)^3$$

Visualisierung: Herwig Hauser und Sebastian Gann, Posterdesign: Boy Müller und Andreas D. Matt

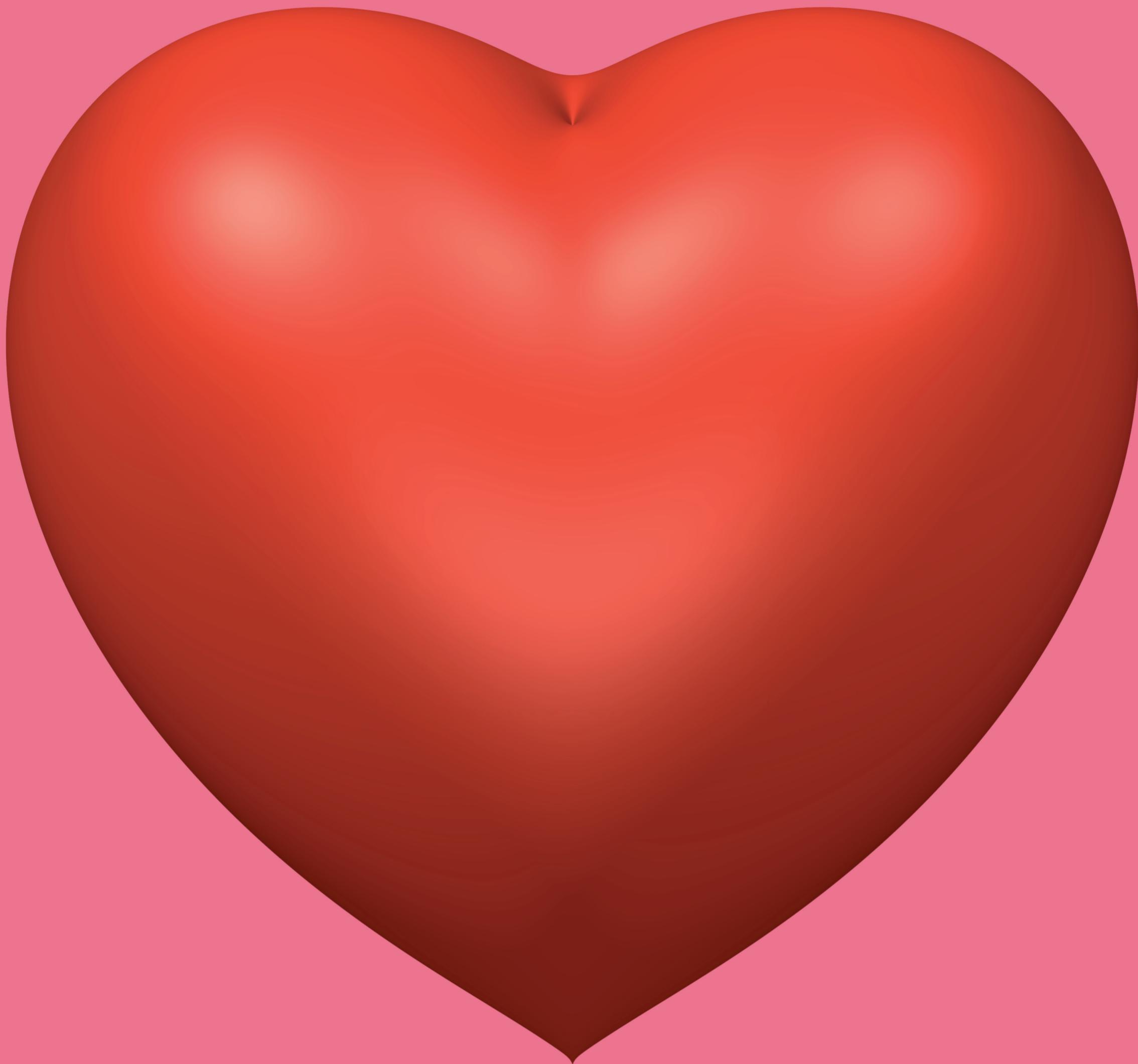


IMAGINARY

Die Gleichung $x^2 + z^2 = y^3(1-y)^3$ von Zitrus erscheint ebenso einfach wie die Figur selbst. Zwei spiegelsymmetrisch angeordnete Spitzen rotieren um die durch sie gehende Achse. Die durch Weglassen von $(1-y)^3$ vereinfachte Gleichung $x^2 + z^2 = y^3$ sorgt für genau eine Spitze und $x^2 + z^2 = (1-y)^3$ liefert das Spiegelbild. Beide sind unendlich ausgedehnte Flächen. Das Produkt auf der rechten Seite der ursprünglichen Gleichung bewirkt, dass Zitrus beschränkt bleibt. Man überlegt sich: Wird y dem Betrag nach größer als 1 und damit die rechte Seite negativ, so erlaubt die Gleichung keine reellen Lösungen für x und z .

Ein Projekt des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach für das Jahr der Mathematik, www.jahr-der-mathematik.de.
Leitung: Gert-Martin Greuel. Information/Bestellung: www.imaginary2008.de, info@imaginary2008.de, +49 7834 979-0.

GEFÖRDERT VOM



$$\text{Süß } (x^2 + 9/4y^2 + z^2 - 1)^3 - x^2z^3 - 9/80y^2z^3 = 0$$

Visualisierung: Herwig Hauser, Sebastian Gann und Christian Stussak, Posterdesign: Boy Müller und Andreas D. Matt



IMAGINARY

Liebesbrief

So kann es nun nicht weitergehn!
Das, was besteht, muß bleiben.
Wenn wir uns wieder wiedersehn,
Muß irgendetwas geschehn.
Was wir dann auf die Spitze treiben.

Was - was auf einer Spitze tut?
Gewiß nicht Plättüden.
Denn was auf einer Spitze ruht,
Wird nicht so leicht ermüden.
Auf einer Bank im Grunewald
Zu zweit im Regen sitzen,
Ist blöd. Mut, Mädchen! Schreibe bald!

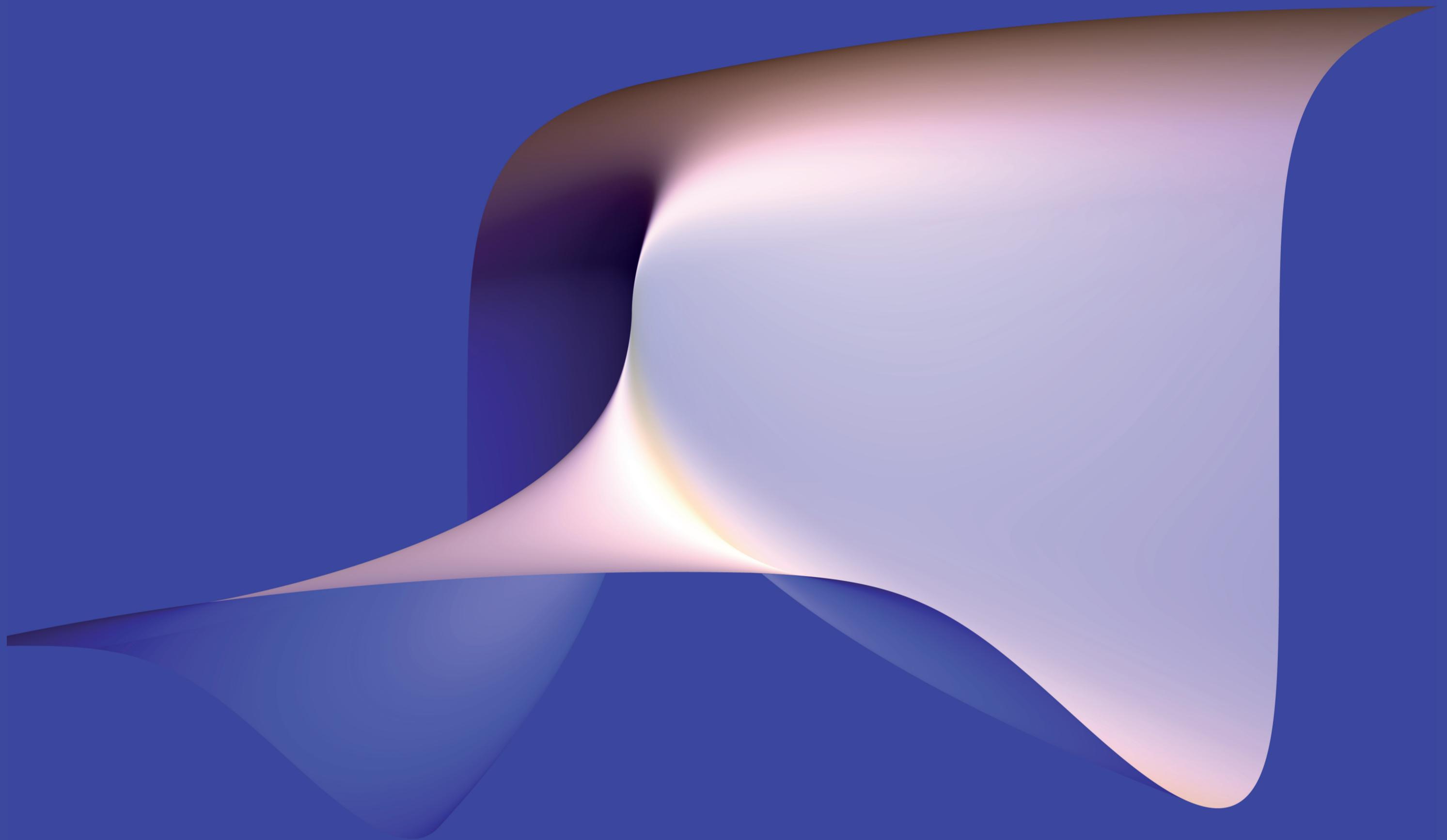
Dein Fritz! (Remember Spitzen).

Gedicht von Joachim Ringelnatz

Anmerkungen aus der algebraischen Geometrie:
Spitzen oder „Singularitäten“ sind mathematisch
besonders interessant. Diese Punkte verhalten sich
außergewöhnlich. Kleine Änderungen der Gleichung
haben an diesen Stellen große Auswirkungen.

Ein Projekt des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach für das Jahr der Mathematik, www.jahr-der-mathematik.de.
Leitung: Gert-Martin Greuel. Information/Bestellung: www.imaginary2008.de, info@imaginary2008.de, +49 7834 979-0.

GEFÖRDERT VOM



$$\text{Sofa } x^2 + y^3 + z^5 = 0$$

Visualisierung: Herwig Hauser und Sebastian Gann, Posterdesign: Boy Müller und Andreas D. Matt

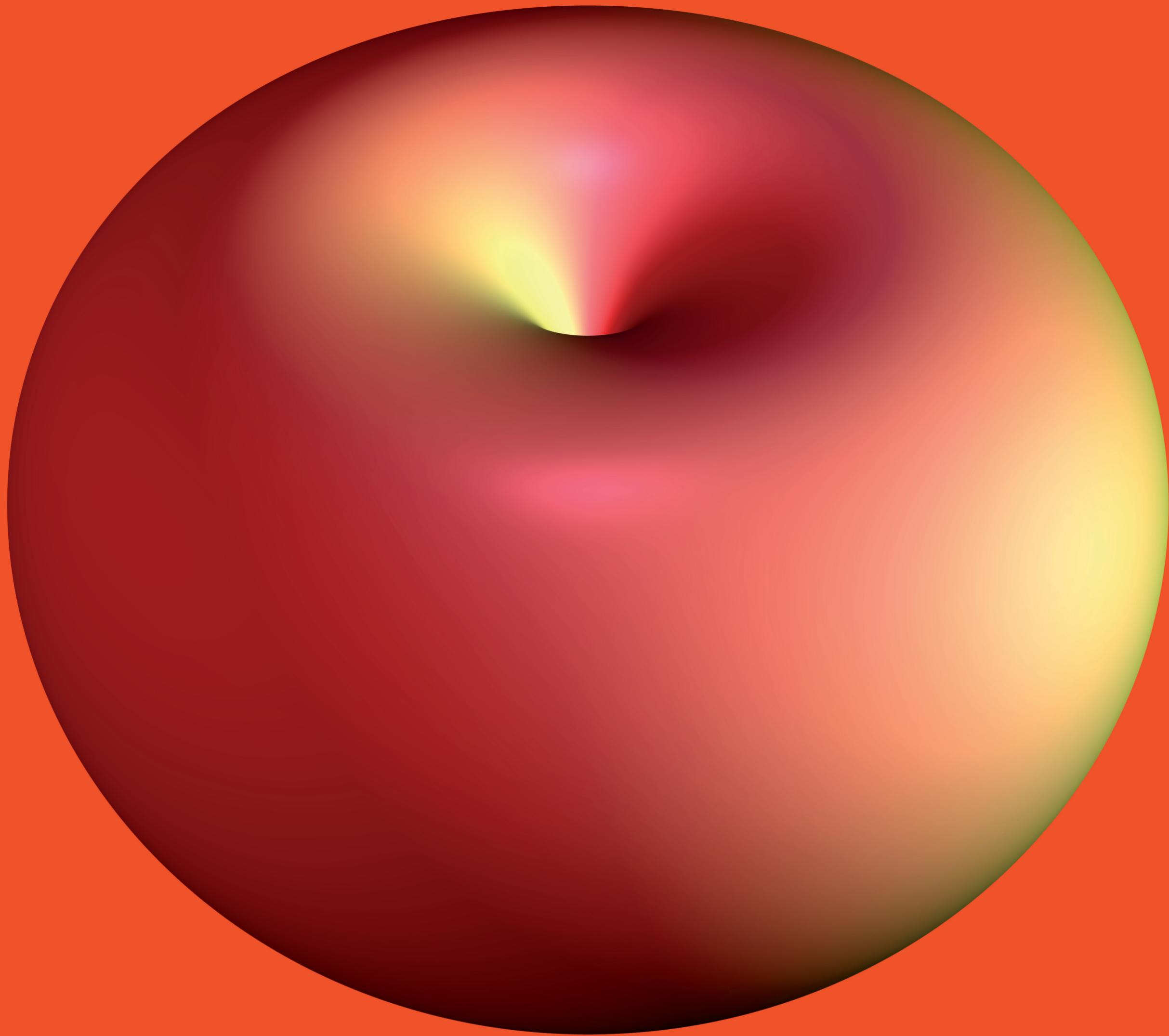


IMAGINARY

Weil eine algebraische Fläche „Sofa“ heisst, muss es noch nicht bequem sein, auf ihr zu sitzen. Hier haben wir eher eine Sitzgelegenheit für zwei Personen, die durch eine Singularität voneinander getrennt werden. Diese Singularität trägt im Mathematikerlatein einen eigenen Namen, nämlich E8, und ist vielleicht die berühmteste aller Singularitäten. In ihr vereinigen sich unter anderem die Theorie der Symmetriegruppen der platonischen Körper (die E8 gehört zum Ikosaeder) und die Theorie der Lie-Gruppen. Das reelle Bild dieser Singularität besticht durch seine Eleganz, lässt aber die mathematische Komplexität nicht erkennen. Diese erschliesst sich erst, wenn man das Imaginäre hinzunimmt.

Ein Projekt des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach für das Jahr der Mathematik, www.jahr-der-mathematik.de.
Leitung: Gert-Martin Greuel. Information/Bestellung: www.imaginary2008.de, info@imaginary2008.de, +49 7834 979-0.

GEFÖRDERT VOM



$$\text{Dullo } (x^2 + y^2 + z^2)^2 - (x^2 + y^2) = 0$$

Visualisierung: Herwig Hauser und Sebastian Gann, Posterdesign: Boy Müller und Andreas D. Matt

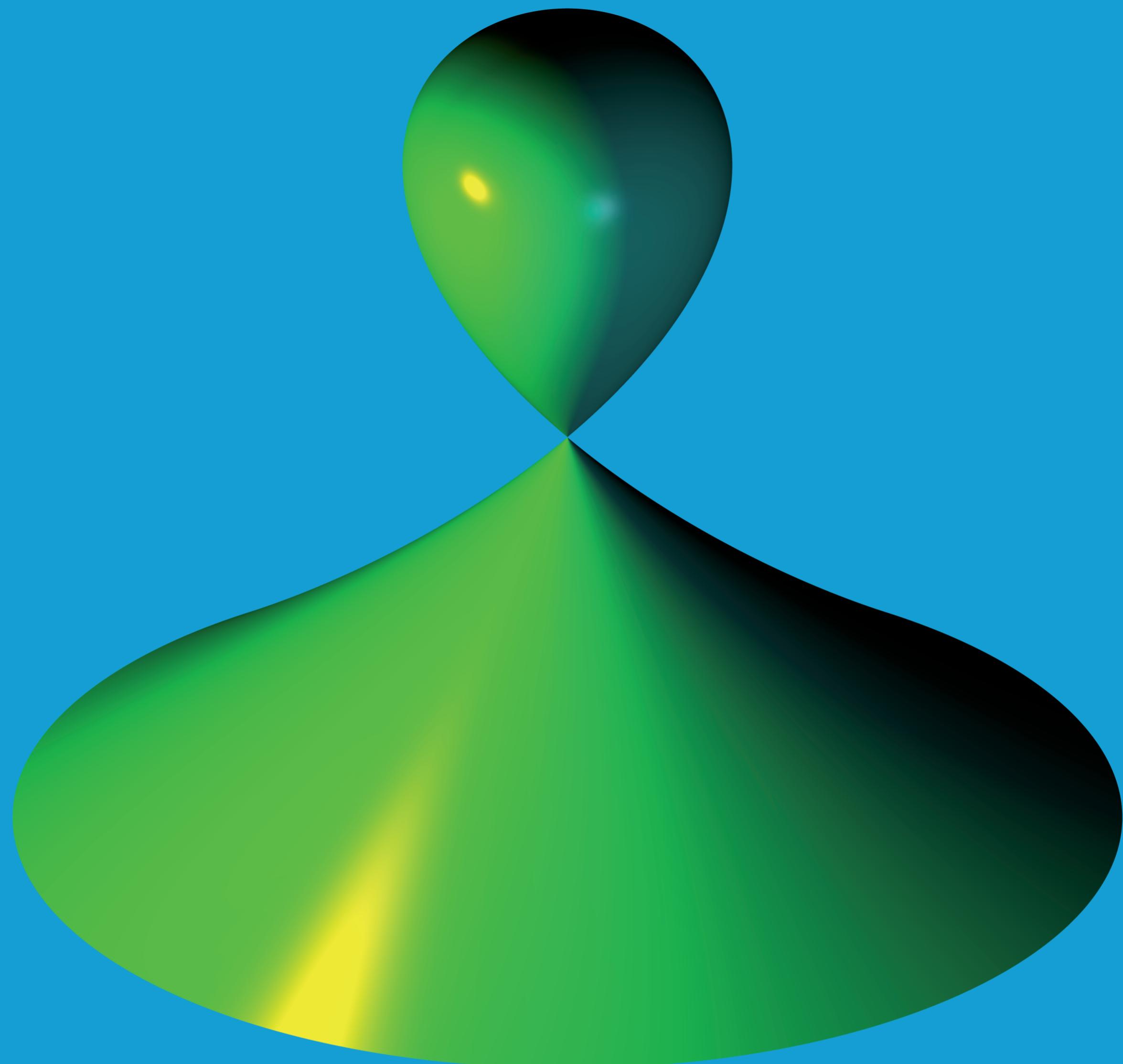


IMAGINARY

Schreien im Oval einer modernen Fussballarena die Zuschauer bei einem Tor (üblicherweise der eigenen Mannschaft), so breitet sich der Schall wie ein Schwimmreifen aus, den man rasch aufbläst. Nach einigen Sekundenbruchteilen berührt sich der Schwimmreifen innen - die Öffnung hat sich geschlossen - und das passiert genau am Anstoßpunkt. Dort treffen alle Schallwellen gleichzeitig von allen Richtungen ein und verstärken sich entsprechend. Darum werden Schiedsrichter angewiesen, immer auf Ballhöhe zu sein. Dies soll verhindern, dass sie bei „Tor“ im Mittelkreis stehen und Ohrensausen bekommen.

Ein Projekt des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach für das Jahr der Mathematik, www.jahr-der-mathematik.de.
Leitung: Gert-Martin Greuel. Information/Bestellung: www.imaginary2008.de, info@imaginary2008.de, +49 7834 979-0.

GEFÖRDERT VOM



Ding Dong $x^2+y^2+z^3=z^2$

Visualisierung: Herwig Hauser und Sebastian Gann, Posterdesign: Boy Müller und Andreas D. Matt

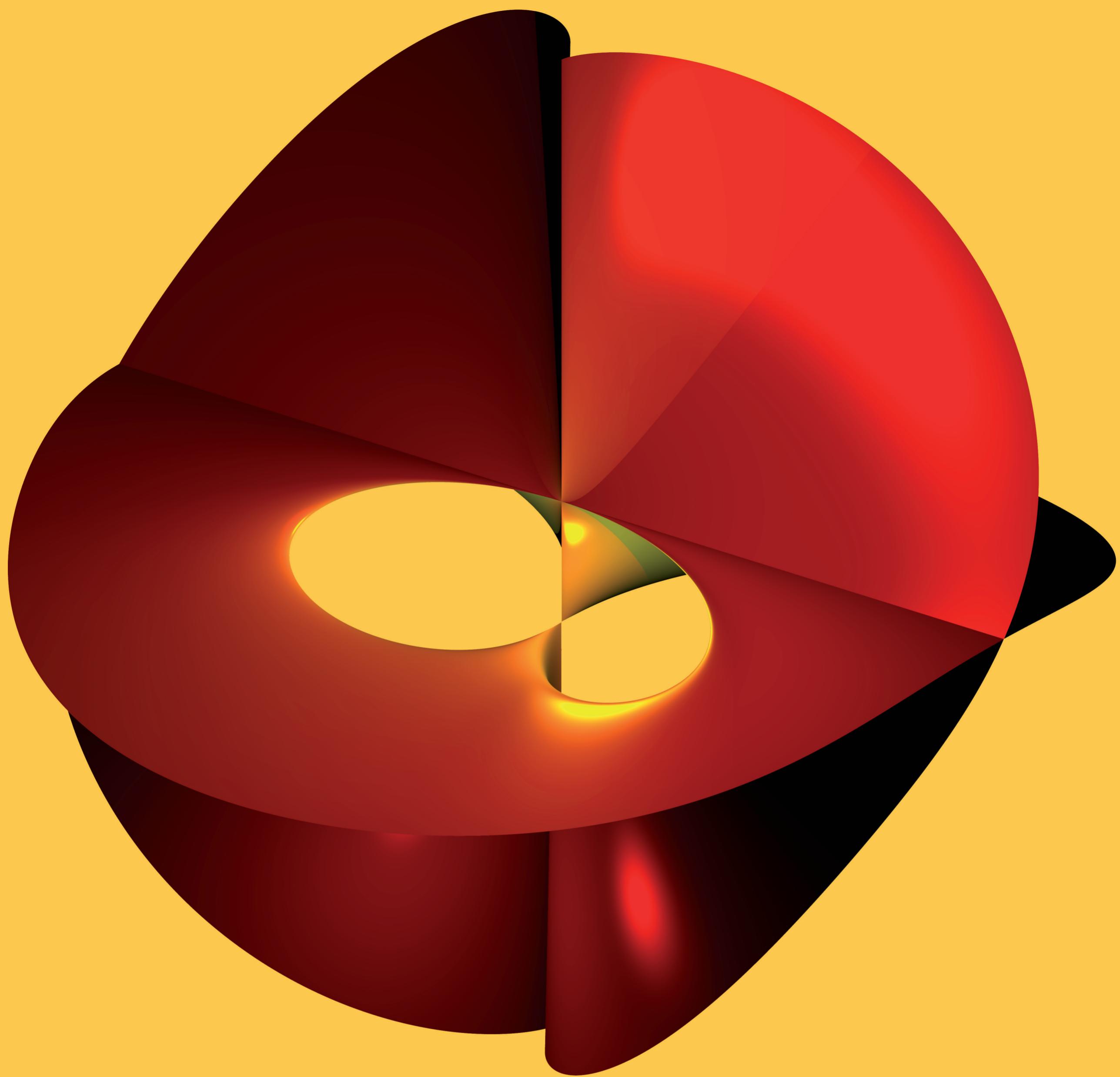


IMAGINARY

Diese Fläche mit der Gleichung $x^2+y^2+z^3=z^2$ war eine der allerersten Visualisierungen, die wir versuchten. Gleichung und Form sind einfach: eine vertikal gestellte Alpha-Schleife rotiert um die z-Achse. Das Problem bestand in der Färbung. Grün ist prinzipiell heikel, um Flächen plastisch darzustellen, und zudem sticht es leicht ins Matte oder Gelbliche. Die Lichter und Reflexionen müssen lange erprobt werden. Man beachte hier den leichten blauen Schlagschatten, der ein bisschen die räumliche Wirkung verstärkt.

Ein Projekt des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach für das Jahr der Mathematik, www.jahr-der-mathematik.de.
Leitung: Gert-Martin Greuel. Information/Bestellung: www.imaginary2008.de, info@imaginary2008.de, +49 7834 979-0.

GEFÖRDERT VOM



$$\text{Miau } x^2yz + x^2z^2 + 2y^3z + 3y^3 = 0$$

Visualisierung: Herwig Hauser und Sebastian Gann, Posterdesign: Boy Müller und Andreas D. Matt

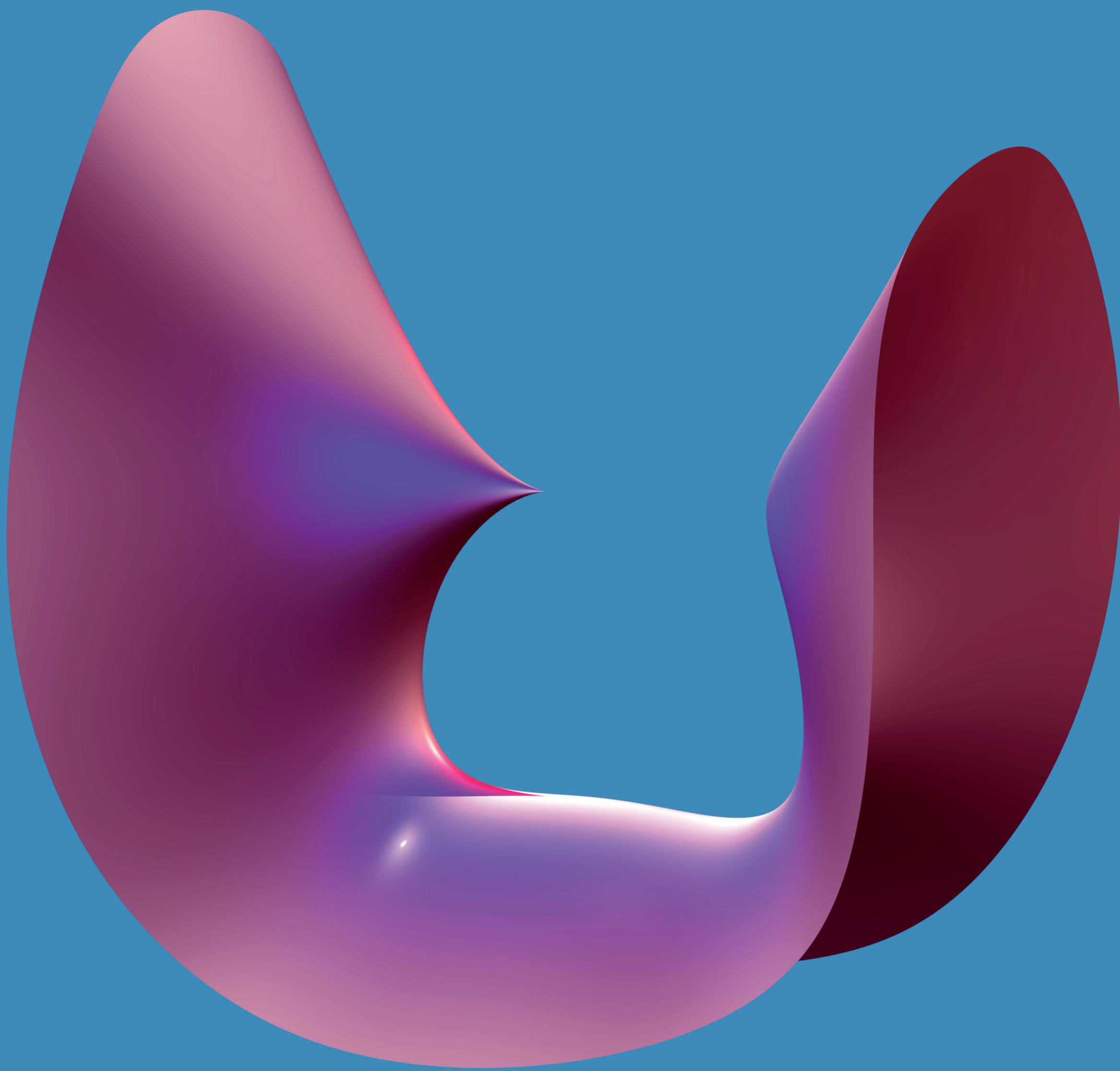


IMAGINARY

Diese Fläche wurde durch Probieren auf einer eher eintönigen Zugfahrt gefunden (Arbeiten mit algebraischer Visualisierung lässt die Zeit sehr schnell vergehen). Die Konstellation ist aber keineswegs zufällig - im Gegen teil, wollte man für diese Fläche die algebraische Gleichung systematisch herleiten, stieße man wohl auf un überwindbare Probleme. Der Reiz von Miau ist natürlich die doppelte Öffnung mit eingelagerter Singularität. Für den Mathematiker ist dies eine Fundgrube, die geheimnisvolle Beziehung zwischen Gleichung und Form zu erforschen.

Ein Projekt des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach für das Jahr der Mathematik, www.jahr-der-mathematik.de.
Leitung: Gert-Martin Greuel. Information/Bestellung: www.imaginary2008.de, info@imaginary2008.de, +49 7834 979-0.

GEFÖRDERT VOM



Vis à Vis $x^2 - x^3 + y^2 + y^4 + z^3 - z^4 = 0$

Visualisierung: Herwig Hauser und Sebastian Gann, Posterdesign: Boy Müller und Andreas D. Matt



IMAGINARY

Vis à Vis heißt Gegenüber - und hier stehen sich zwei wesentliche Phänomene der algebraischen Geometrie gegenüber. Die singuläre Spitze links schaut auf einen gewölbten, aber glatten Hügel rechts. Die Singularität ist spannender, da etliche Änderungen der Gleichung unvorhersehbare Änderungen der Form bewirken können, was bei glatten Stellen nicht passiert. Mit dem Programm SURFER, das unter surfer.imaginary2008.de frei erhältlich ist, kann man solche Flächen ganz einfach und intuitiv selbst herstellen und verändern. Die Gegenüberstellung von Form und Formel, also der Gleichung und der dazugehörigen Fläche, wird so zum interaktiven Erlebnis und dadurch noch anschaulicher.

Ein Projekt des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach für das Jahr der Mathematik, www.jahr-der-mathematik.de.
Leitung: Gert-Martin Greuel. Information/Bestellung: www.imaginary2008.de, info@imaginary2008.de, +49 7834 979-0.

GEFÖRDERT VOM



Seepferdchen $(x^2-y^3)^2=(x+y^2)z^3$

Visualisierung: Herwig Hauser und Sebastian Gann, Posterdesign: Boy Müller und Andreas D. Matt



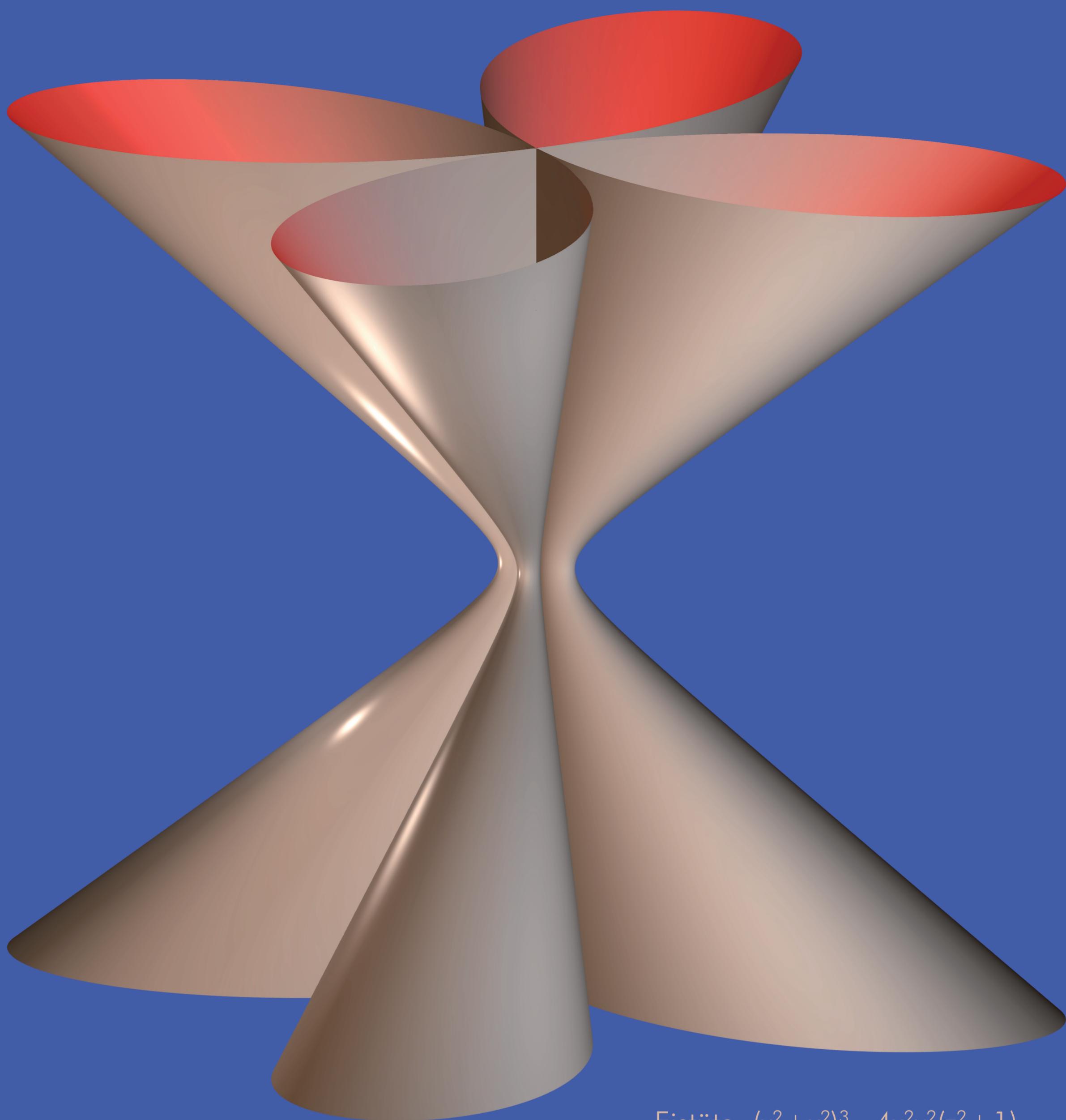
IMAGINARY

Wollte man die Gleichung für diese Fläche finden, müsste man sich ordentlich anstrengen. Denn die zarte Berührung ist nicht leicht zu erreichen. Ändert man nur ein bisschen die Formel, schon ist die Berührung verschwunden.

Die Eleganz des Seepferdchens täuscht. Schaut man von hinten oder von der Seite darauf, wirkt es recht plump - aber das kommt ja bei anderen Lebewesen auch manchmal vor. Seepferdchen leben weltweit in tropischen und gemäßigten Meeren. Sein lateinischer Name ist Hippocampus, seine Formel steht oben.

Ein Projekt des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach für das Jahr der Mathematik, www.jahr-der-mathematik.de.
Leitung: Gert-Martin Greuel. Information/Bestellung: www.imaginary2008.de, info@imaginary2008.de, +49 7834 979-0.

GEFÖRDERT VOM



$$\text{Eistüte } (x^2+y^2)^3=4x^2y^2(z^2+1)$$

Visualisierung: Herwig Hauser, Sebastian Gann und Christian Stussak, Posterdesign: Boy Müller und Andreas D. Matt



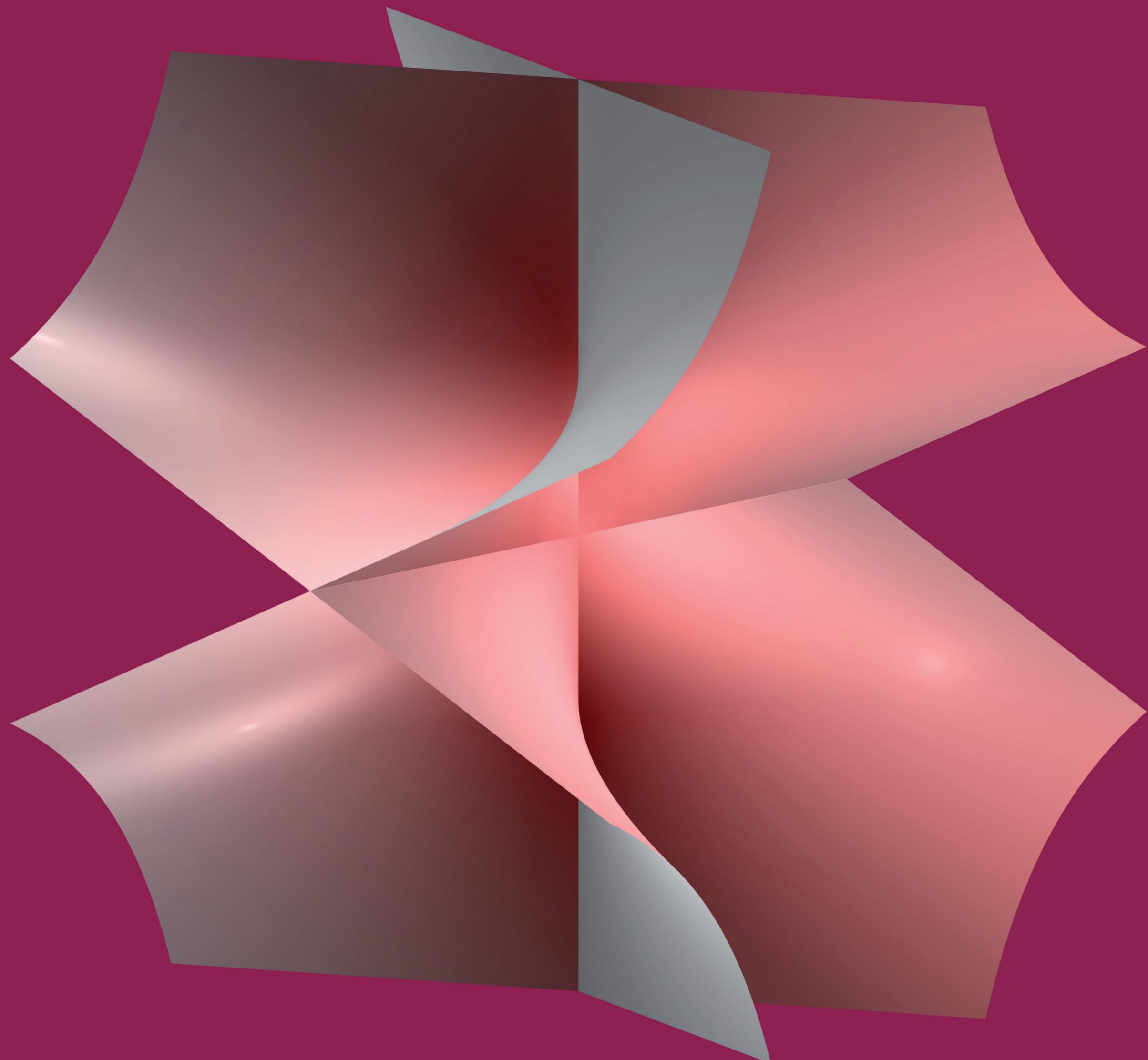
IMAGINARY

Der horizontale Schnitt von Eistüte ist eine so genannte Rosettenkurve: Ein kleines Rad rollt im Inneren eines Kreisringes ab. Ein auf dem Rad befestigter Bleistift zeichnet dabei eine Kurve. Je nach dem Verhältnis der beiden Radien bilden sich verschiedene Kurven. Die Kurve schliesst sich genau dann, wenn das Verhältnis eine Bruchzahl ist. In unserem Fall ist es der Vierklee.

Unsere Eistüte hat den Vorteil, dass vier Kugeln draufpassen. Man muss sie schnell schlecken, sonst tropft das Eis innen durch.

Ein Projekt des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach für das Jahr der Mathematik, www.jahr-der-mathematik.de.
Leitung: Gert-Martin Greuel. Information/Bestellung: www.imaginary2008.de, info@imaginary2008.de, +49 7834 979-0.

GEFÖRDERT VOM



Himmel und Hölle $x^2-y^2z^2=0$

Visualisierung: Herwig Hauser und Sebastian Gann, Posterdesign: Boy Müller und Andreas D. Matt

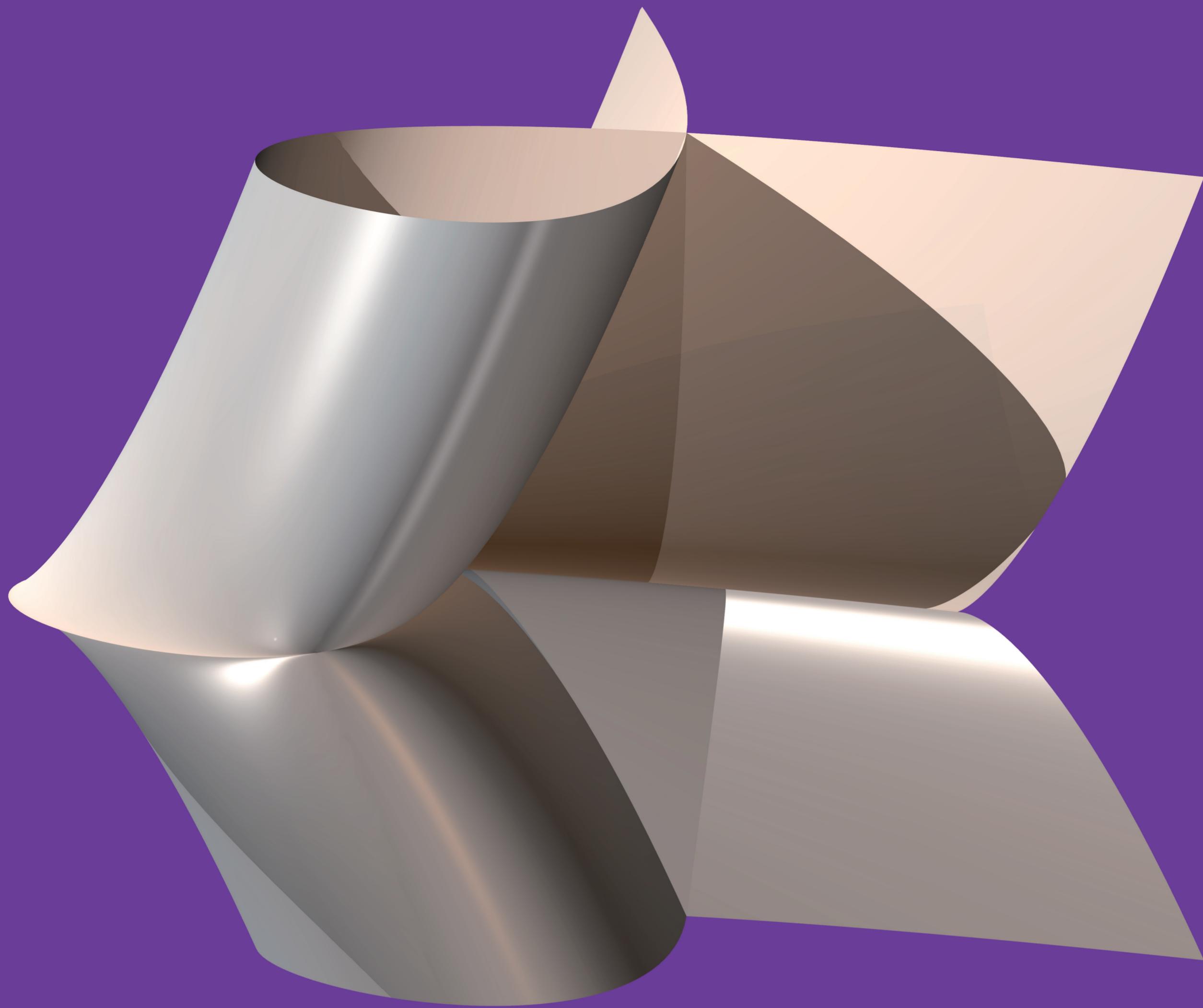


IMAGINARY

Ein Blatt Papier wird gefaltet und dann so von unten gehalten, dass man vier Finger in die vier entstandenen Ecken stecken kann. Durch Spreizen der Finger öffnet sich die Form auf zwei verschiedene Arten, man sieht jeweils zwei der vier inneren Seiten, die blauen für den Himmel, die roten für die Hölle. Die Kinder raten, welche Farbe erscheinen wird. Unsere Figur erinnert ein bisschen an dieses Spiel, daher der Name. Die Quadrate bei y und z werden zueinander addiert, das ergibt die höchste vorkommende Hochzahl 4. Man spricht von einer Gleichung vom Grad 4. Je höher der Grad, desto komplizierter ist es, die Fläche zu berechnen.

Ein Projekt des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach für das Jahr der Mathematik, www.jahr-der-mathematik.de.
Leitung: Gert-Martin Greuel. Information/Bestellung: www.imaginary2008.de, info@imaginary2008.de, +49 7834 979-0.

GEFÖRDERT VOM



Quaste

$$\begin{aligned} 8z^9 - 24x^2z^6 - 24y^2z^6 + 36z^8 + 24x^4z^3 - 168x^2y^2z^3 + 24y^4z^3 - 72x^2z^5 - 72y^2z^5 + 54z^7 - \\ 8x^6 - 24x^4y^2 - 24x^2y^4 - 8y^6 + 36x^4z^2 - 252x^2y^2z^2 + 36y^4z^2 - 54x^2z^4 - 108y^2z^4 + 27z^6 - \\ 108x^2y^2z + 54y^4z - 54y^2z^3 + 27y^4 = 0 \end{aligned}$$

Visualisierung: Herwig Hauser, Sebastian Gann und Christian Stussak, Posterdesign: Boy Müller und Andreas D. Matt

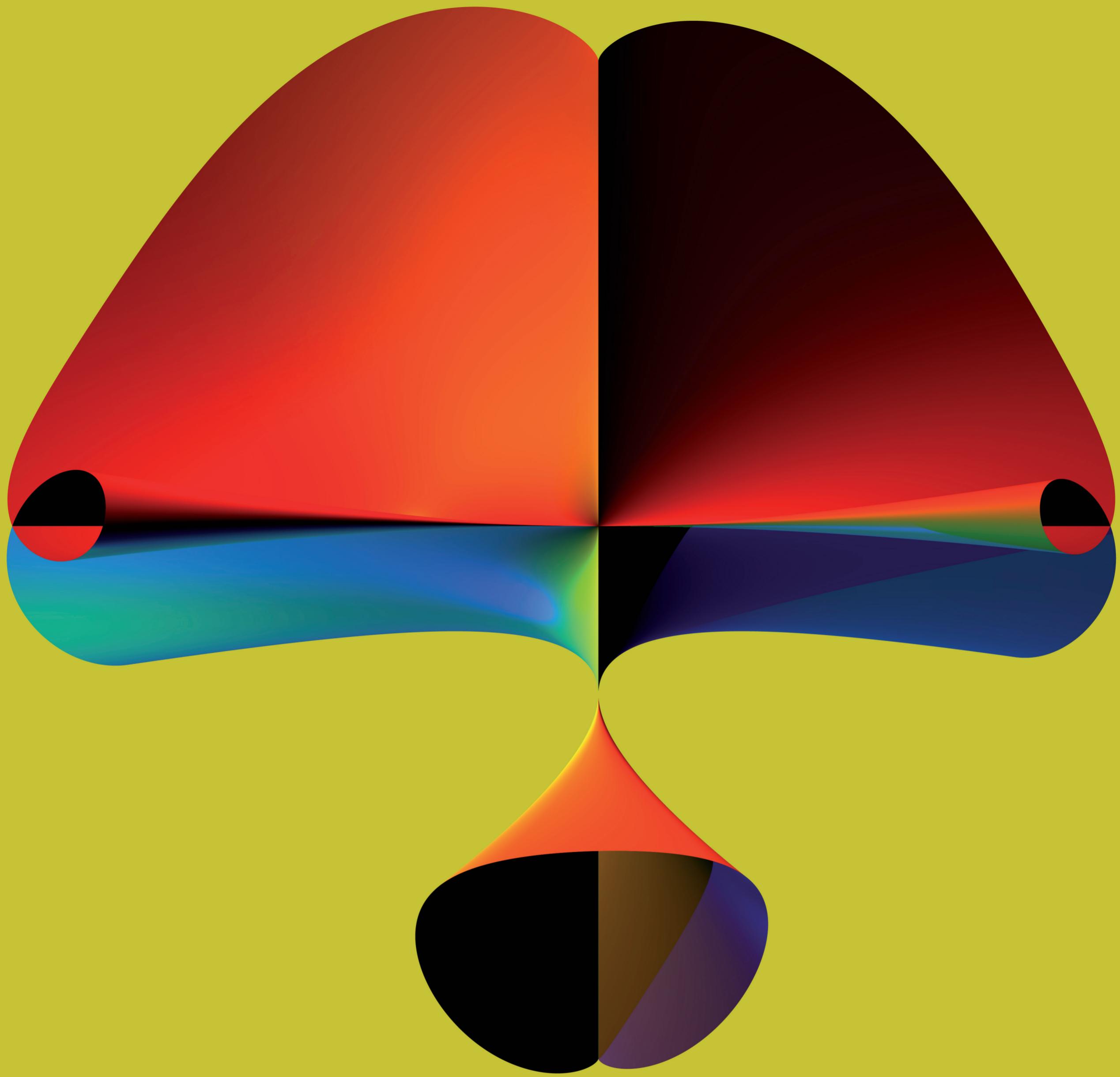


IMAGINARY

Der obere Rand dieser Fläche ist eine Schleife in der Form des griechischen Buchstaben Alpha. Der seitliche Rand rechts hingegen besteht aus zwei parallelen, so genannten kuspidalen Kurven mit jeweils einer Spitze. Verschiebt man nun die horizontale Schleife vertikal nach unten, indem man ihre beiden Endpunkte rechts längs der Spitzkurven führt, entsteht die Fläche Quaste. Umgekehrt kann man auch eine der Spitzkurven längs der Schleife verschieben und erhält die gleiche Figur. Flächen mit dieser Eigenschaft heißen kartesische Produkte, nach dem französischen Mathematiker René Descartes.

Ein Projekt des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach für das Jahr der Mathematik, www.jahr-der-mathematik.de.
Leitung: Gert-Martin Greuel. Information/Bestellung: www.imaginary2008.de, info@imaginary2008.de, +49 7834 979-0.

GEFÖRDERT VOM



Geisha $x^2yz + x^2z^2 = y^3z + y^3$

Visualisierung: Herwig Hauser und Sebastian Gann, Posterdesign: Boy Müller und Andreas D. Matt



IMAGINARY

Diese Fläche ist schon recht kompliziert, auch wenn sie eine ebenmässige Spiegel-Symmetrie aufweist. Den Namen verdankt sie ihrer nach innen gewandten Identität: diskret, ruhig und anmutig. Die schleifenartige Ausformung erinnert an die Schleife eines Kimonos. Die Farben und das Bild entstehen durch Raytracing: Für jede Stelle im Bild wird ein Strahl verfolgt und wenn dieser auf die Figur trifft, wird der Farbwert anhand eines Beleuchtungsmodells mit Lichtquellen berechnet. Die Anmut der Geisha wird durch die besondere Beleuchtung betont.

Ein Projekt des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach für das Jahr der Mathematik, www.jahr-der-mathematik.de.
Leitung: Gert-Martin Greuel. Information/Bestellung: www.imaginary2008.de, info@imaginary2008.de, +49 7834 979-0.

GEFÖRDERT VOM