

Pythagoräisches Stabmodell

Das Stabmodell ist ein einfaches Spiel:

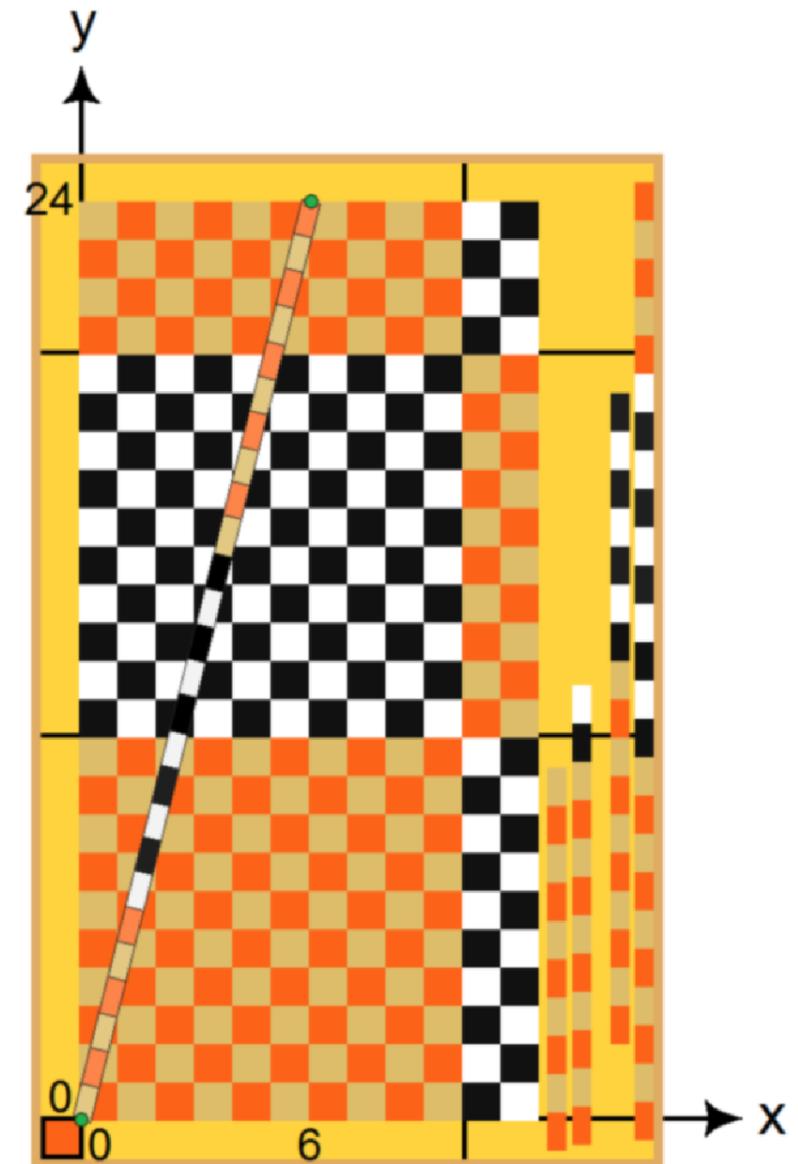
Mit unterschiedlich langen Stäben kann jeweils eine der drei bunten Murmeln an dem vertikalen Turm mit einer gleichfarbigen Murmel auf der Fläche verbunden werden. Mit dem längsten Stab, der eine Länge von 26 Einheiten besitzt, kann man z. B. die mittlere grüne Murmel an dem Turm mit der grünen Murmel auf der gegenüberliegenden kurzen Seite verbinden.

Die überraschende Ganzzahligkeit des Diagonalmaßes lässt sich mit einer räumlichen Anwendung des pythagoräischen Lehrsatzes erklären:

Die Strecken entlang der x-, der y- und der vertikalen z-Achse zwischen den beiden Murmeln betragen 6, 24 und 8 Einheiten. Ihre Quadrate betragen also 36, 576 und 64. Zählt man die Quadrate zusammen, ergibt sich 676. Das wiederum entspricht genau dem Quadrat von 26.

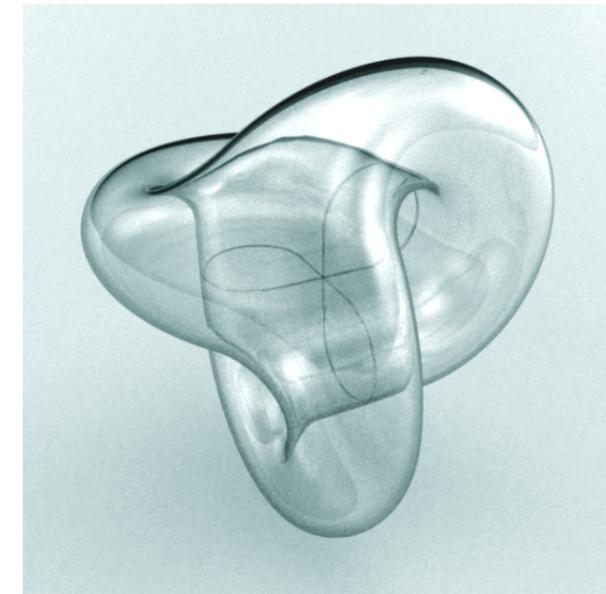
Da der Lehrsatz des Pythagoras allgemeingültig ist, beträgt die Summe der Quadrate der x-, y- und z-Abstände der beiden Endpunkte des 26 Einheiten langen Stabes immer 676, völlig unabhängig von der Lage des Stabes im Bezug auf das Koordinatensystem.

Deshalb beschreibt die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ die Oberfläche einer Kugel, wobei der Radius r in diesem Fall die Länge des Stabes angibt.



Slice of Boy

von Bianca Violet



Eine Boyfläche (kleines Bild rechts, von Arnaud Chéritat) ist eine geschlossene Fläche, die sich selbst durchdringt. Ihre „Innenseite“ ist gleichzeitig ihre „Außenseite“.

Die Bänder auf dem Bild von Bianca Violet sind aus zwei spiegelsymmetrischen Boy-Flächen herausgeschnitten.

Daher sind die Bänder zum Teil Möbiusbänder, d. h. ihre „Vorderseiten“ sind zugleich auch ihre „Rückseiten“.

Die weiße Kreisfläche ist eine Einheitskugel und verdeckt den zentralen Teil der beiden Boy-Flächen. Das **SURFER**-Programm schneidet zusätzlich noch alles weg, was außerhalb einer unsichtbaren Kugel liegt. Da diese Kugel etwas größer gewählt wurde als die weiße, sind von den beiden Boy-Flächen nur die schmalen schwarzen Bänder zu sehen.

Die Gleichung, die sich hier auf beide Boy-Flächen bezieht, stammt von François Apéry:

$$\begin{aligned} & (64 \cdot (1-z)^2 \cdot z^3 - 48 \cdot (1-z)^2 \cdot z^2 \cdot (3 \cdot x^2 + 3 \cdot y^2 + 2 \cdot z^2) + 12 \cdot (1-z) \cdot z \cdot (27 \cdot (x^2 + y^2)^2 - \\ & 24 \cdot z^2 \cdot (x^2 + y^2) + 36 \cdot \sqrt{2} \cdot y \cdot z \cdot (y^2 - 3 \cdot x^2) + 4 \cdot z^4) + (9 \cdot x^2 + 9 \cdot y^2 - 2 \cdot z^2) \cdot \\ & (-81 \cdot (x^2 + y^2)^2 - 72 \cdot z^2 \cdot (x^2 + y^2) + 108 \cdot \sqrt{2} \cdot x \cdot z \cdot (x^2 - 3 \cdot y^2) + 4 \cdot z^4)) \cdot \\ & (64 \cdot (1-z)^2 \cdot z^3 - 48 \cdot (1-z)^2 \cdot z^2 \cdot (3 \cdot y^2 + 3 \cdot x^2 + 2 \cdot z^2) + 12 \cdot (1-z) \cdot z \cdot (27 \cdot (y^2 + x^2)^2 - \\ & 24 \cdot z^2 \cdot (y^2 + x^2) + 36 \cdot \sqrt{2} \cdot x \cdot z \cdot (x^2 - 3 \cdot y^2) + 4 \cdot z^4) + (9 \cdot y^2 + 9 \cdot x^2 - 2 \cdot z^2) \cdot \\ & (-81 \cdot (y^2 + x^2)^2 - 72 \cdot z^2 \cdot (y^2 + x^2) + 108 \cdot \sqrt{2} \cdot y \cdot z \cdot (y^2 - 3 \cdot x^2) + 4 \cdot z^4)) = 0 \end{aligned}$$

Die Fläche der weißen Kugel besitzt die Gleichung: $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$

Octics

von Torolf Sauermann

Das Bild **Octics** von Torolf Sauermann erlaubt einen Blick in den zentralen Teil der algebraischen Fläche, die rechts in einem größeren Ausschnitt abgebildet ist.

In Anbetracht der Komplexität der Fläche erscheint ihre Gleichung relativ einfach.

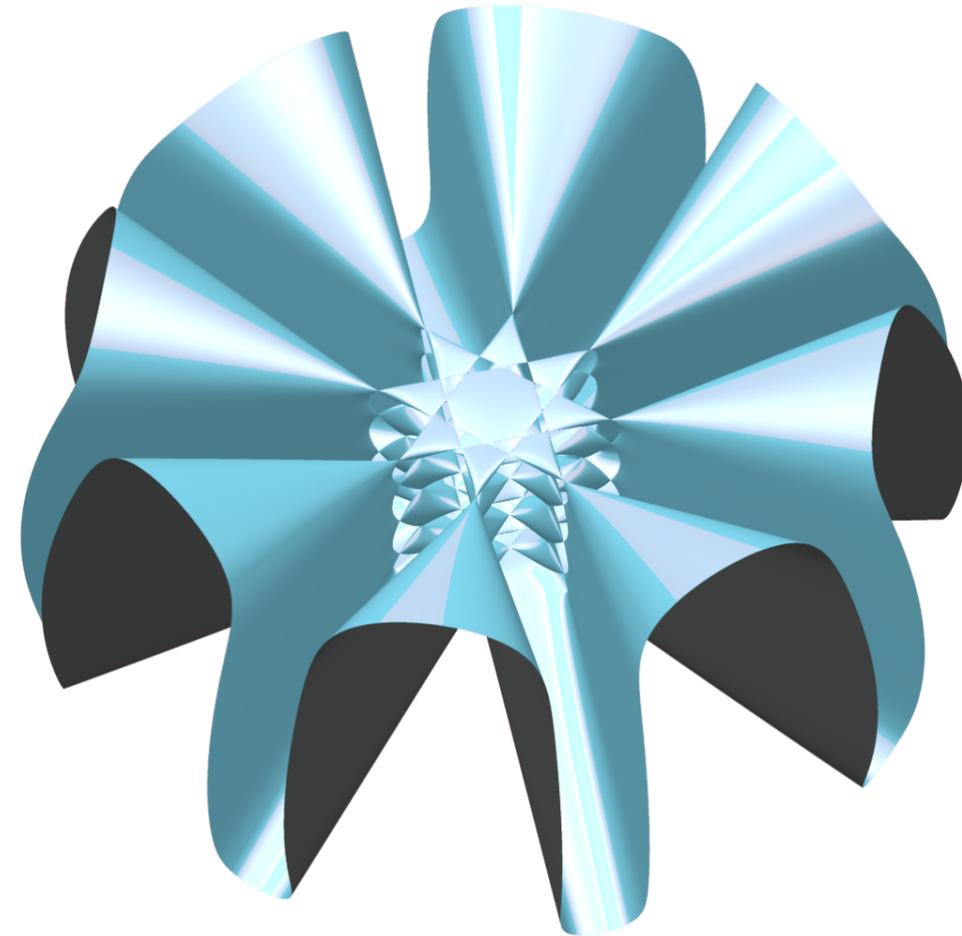
In der klassischen Schreibweise lautet sie:

$$(x^2 - 1) \cdot (y^2 - 1) \cdot [x^4 - 2 \cdot x^2 \cdot (y^2 + 2) + y^4 - 4 \cdot y^2 + 4] - (z + 1) \cdot (z^4 - 5 \cdot z^3 + 6 \cdot z^2 + z - 2)^2 = 0$$

Bei der Eingabe der Gleichung in das **SURFER**-Programm muss man die Exponenten, die in der klassischen Schreibweise im oberen Index stehen, durch ein vorangestelltes Dach-Symbol (^) kennzeichnen. Man muss die Gleichung also wie folgt eingeben:

$$(x^{\wedge}2-1) \cdot (y^{\wedge}2-1) \cdot (x^{\wedge}4-2 \cdot x^{\wedge}2 \cdot (y^{\wedge}2+2)+y^{\wedge}4-4 \cdot y^{\wedge}2+4)-(z+1) \cdot (z^{\wedge}4-5 \cdot z^{\wedge}3+6 \cdot z^{\wedge}2+z-2)^{\wedge}2=0$$

Die Gleichung wird dann vom Programm visualisiert und kann beliebig herangezoomt, gedreht und eingefärbt werden.



Fünf Glasflächen auf einer Tischplatte

von Luc Benard und Richard Palais

Breather Fläche

symmetrisches 4-Noid

Kleinsche Flasche



Boysche Fläche

Sievert-Enneper
Fläche

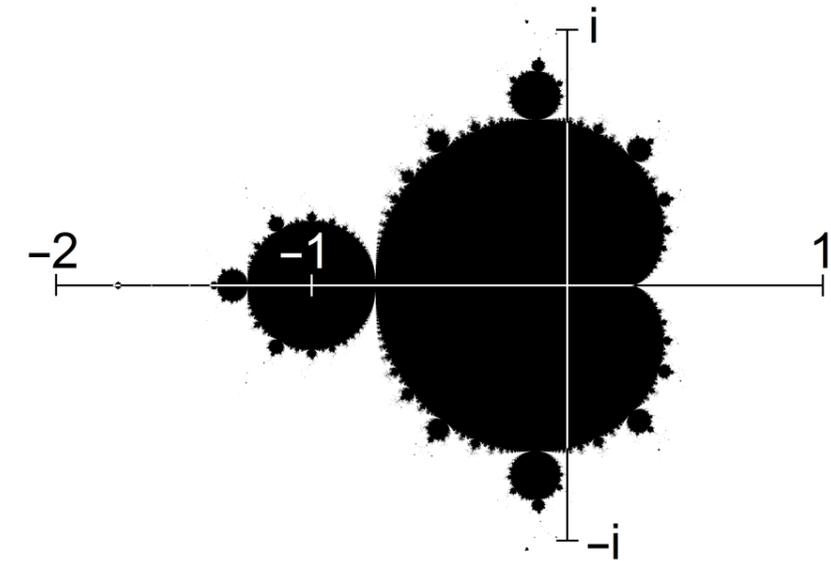
Dieses Bild entstand in der Zusammenarbeit des Mathematikers Richard Palais und des Grafik-Künstlers Luc Benard. Es wurde mit dem ersten Preis des **2006 Visualization Challenge** der Zeitschrift Science in der Kategorie „Illustration“ ausgezeichnet und war am 22.9.2006 auch auf dessen Cover zu sehen.

Die Flächen der Körper in diesem Bild wurden von Richard Palais mit dem Programm **3D_XplorMath** entworfen und dann von Luc Benard im Programm **Bryce** erzeugt.

Die Mandelbrotmenge

illustriert von Aubin Arroyo

Die **Mandelbrotmenge**, besser unter ihrem Kosenamen Apfelmännchen bekannt, ist ein rein mathematisches Konstrukt, das 1980 von Benoît Mandelbrot, dem „Vater“ der fraktalen Geometrie, entdeckt wurde.



Die beiden Detail-Bilder links neben der Gesamtansicht zeigen die ornamentale Schönheit ihres Randbereichs, in dem immer wieder kleine Kopien der gesamten Menge auftauchen.

Die Mandelbrotmenge beruht auf der einfachen (\rightarrow rekursiven) Formel $\mathbf{z}_{n+1} = \mathbf{z}_n^2 + \mathbf{c}$.

Sowohl \mathbf{z} als auch \mathbf{c} sind komplexe Zahlen, die jeweils ganz bestimmten Punkten in einem Koordinatensystem entsprechen. Für jede Zahl \mathbf{c} wird die Formel unzählige Male hintereinander berechnet, wobei das Ergebnis (\mathbf{z}) immer wieder in die Formel eingesetzt wird. Eine solche Art der Rechnung wird **rekursiv** genannt.

Für jede Zahl \mathbf{c} kann es dabei letztendlich nur zwei unterschiedliche Ergebnisse geben: Entweder streben die Werte für \mathbf{z} irgendwann gegen unendlich (Fluchtmenge), oder sie bleiben für immer in einem Kreis mit Radius 2 gefangen (Gefangenenmenge).

Die Zahlen bzw. Punkte der Gefangenenmenge bilden die Mandelbrotmenge, die in dem kleinen Bild oben als schwarze Punktmenge auf einem Koordinatensystem dargestellt ist. Auf der großen Texttafel wird die Menge anhand von Beispielrechnungen beschrieben.

sea invader

von Torsten Stier

Die Bilder *sea invader* und *rulin' the desert* von Torsten Stier, sowie sein Film *oldschool connection*, der in der Kino-Box gezeigt wird, basieren auf demselben mathematischen Objekt, der „Mandelbox“.



Die Mandelbox wurde 2010 von Tom Lowe gefunden. Sie ist eines der ersten einer neuen Generation von 3D-Fraktalen, die seit Ende 2009 vorgestellt wurden.

In der Mandelbox werden einige aus der zweidimensionalen Mandelbrotmenge bekannte Transformationen auf graphisch-geometrische Weise in die dritte Dimension erhoben.

Die Quadrierung einer komplexen Zahl entspricht in der zweidimensionalen (gaußschen) Ebene im Wesentlichen einer Verschiebung entlang eines Kreises. Im Fall der Mandelbox wird sie in eine Kugeltransformation, den sogenannten ball-fold, umgewandelt.

Auch wenn diese Kugeltransformation mathematisch-formal in keinsten Weise eine dreidimensionale Repräsentation der entsprechenden 2D-Transformation darstellt, bildet die Mandelbox dennoch viele wesentliche Eigenschaften der zweidimensionalen Mandelbrotmenge in der dritten Dimension ab.

Die Mandelbox beeindruckt durch einen atemberaubenden räumlichen Formenreichtum, ähnlich dem der Mandelbrotmenge in zwei Dimensionen.

Wilder Knoten

von Aubin Arroyo

Aus jedem normalen Knoten kann durch das Verbinden seiner beiden losen Enden ein mathematischer Knoten erzeugt werden.

Das kleine Bild rechts zeigt eine Perlenkette in Form eines mathematischen Kleeblattknotens. Dazu wurde in die offene Kette ein einfacher Knoten geknüpft und dann das Kettenschloss zugemacht.



Mathematische Knoten, die wie der Kleeblattknoten auch in unserer wirklichen Welt existieren können, nennt man **zahme Knoten**.

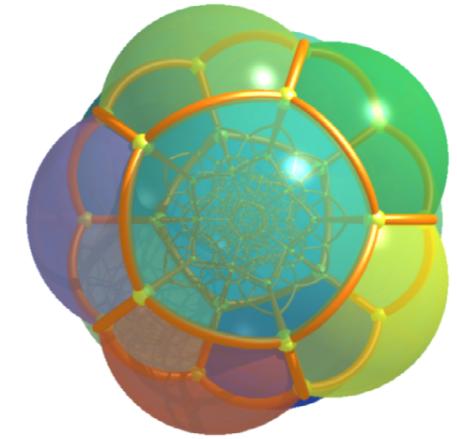
Im Gegensatz dazu besteht ein **wilder Knoten** aus unendlich vielen, einzelnen Knoten. Deshalb kann ein wilder Knoten kein Objekt unserer realen Welt sein.

Auf dem großen Bild ist der Ausschnitt einer computergenerierten Perlenkette zu sehen. Der in die Kette geknüpfte (zahme) Knoten wird in jeder Perle wiedergespiegelt. In jeder dieser wiedergespiegelten Perlen ist wiederum eine entsprechende Spiegelung zu sehen. Theoretisch wiederholen sich die Spiegelungen unendlich oft.

Der wilde Knoten, den wir hier als virtuelles Bild sehen, besitzt **fraktale** Eigenschaften.

Hecatonicosachoron

von Aurélien Alvarez, Étienne Ghys und Jos Leys



Das **Hecatonicosachoron** ist ein reguläres Polytop (Vieleck) in vier Dimensionen. Die häufigere Bezeichnung ist **120-Zell**.

Es ist das 4-dimensionale Analogon des 3-dimensionalen Dodekaeders, der 12 fünfeckige Seitenflächen (**F**), 20 Ecken (**E**) und 30 Kanten (**K**) besitzt. Wie bei jedem 3-dimensionalen Polyeder gilt auch beim Dodekaeder die Eulersche Polyederformel: **$K = E + F - 2$** .

Das Hecatonicosachoron hat 120 „Seitenflächen“ im Vierdimensionalen, das heißt sie sind eigentlich 3-dimensionale „Flächen“, also Dodekaeder!

Der Dodekaeder im Zentrum ist von 12 leicht verzerrten Dodekaedern umgeben. Dadurch entstehen 20 konkave Ecken, in die stärker verzerrte Dodekaeder eingepasst werden.

In die dabei entstehenden Ecken passen wieder 12, dann 30, dann wieder 12, dann noch einmal 20, und zuletzt wieder 12 (dann bereits sehr stark verzerrte) Dodekaeder.

Beim 120sten Dodekaeder ist das Innere sogar nach außen gestülpt. Somit ist auch er von den 12 äußeren (stark verzerrten) Dodekaedern „umgeben“. Jeder der 120 Dodekaeder des 120-Zells ist also von genau 12 Dodekaedern umgeben.

Da jede 2-dimensionale Dodekaederfläche immer zu zwei Dodekaedern gehört, gibt es im 120-Zell insgesamt 720 Flächen (die Hälfte von 120 mal 12), 600 Ecken (ein Viertel von 120 mal 20) und 1200 Kanten (ein Drittel von 120 mal 30).

Lyapunov Play

von Luc Benard



Mario Markus vom Max Planck Institut für Ernährung hat dynamische Systeme verwendet, um die Evolution von Tierbeständen, den zeitlichen Wandel von Nahrung, Fruchtbarkeit, Größe usw., zu studieren. Dabei fordert die Dynamik, dass das Fortpflanzungsvermögen quasiperiodisch zwischen zwei Werten hin und her pendelt. Solche Systeme können sowohl einen stabilen Zyklus als auch chaotische Evolution darstellen, abhängig vom Fortpflanzungsvermögen.

Die Stabilitätsbereiche oder das Chaos können durch Berechnung des sogenannten **Lyapunov-Exponenten** analysiert werden (Lyapunov war ein russischer Mathematiker Ende des 19. Jahrhunderts).

Markus-Lyapunov-Bilder sind Farbverknüpfungen des Lyapunov Exponenten gegen die Fruchtbarkeit, entlang der horizontalen und vertikalen Achse. Nur im Stabilitätsbereich werden Farbverläufe dargestellt. Die chaotischen Bereiche, die einem positiven Lyapunov Exponenten entsprechen, bilden den dunkelblauen Hintergrund. Während der Exponent im stabilen Bereich von 0 zu minus unendlich wandert, wandelt sich der Farbton von gelb zu braun. Bei Null, der Chaos-Schwelle, springt die Farbe von gelb zu dunkelblau. Bei den Farbkombinationen wurde Vieles beliebig gewählt, was Spielraum für ästhetische Überlegungen gibt. Das Bild besteht aus sieben originalen Markus-Lyapunov-Bildern, die nachbearbeitet und überlagert wurden.

Stereographische Projektion

von Aurélien Alvarez, Étienne Ghys und Jos Leys



Bei der **stereographischen Projektion** werden Punkte auf der Erdkugel vom Nordpol aus auf eine Ebene projiziert, die senkrecht zur Polachse liegt und dabei den Südpol tangiert.

Alle Punkte der Erdkugel können so auf die Ebene projiziert werden, bis auf den Nordpol. Man nimmt daher einen unendlich weit entfernten Punkt zur Ebene hinzu, der den Nordpol repräsentiert. Die stereographische Projektion bildet Kreise auf der Kugel auf Kreise in der Ebene ab. Winkel von sich schneidenden Kreisen bleiben dabei erhalten.

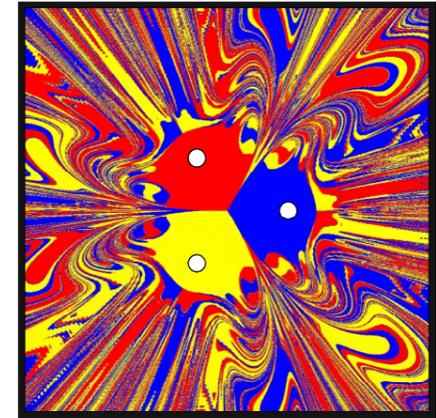
Eine Abbildung, bei der die Winkel erhalten bleiben, nennt man **winkeltreue Projektion**. Auch die Mercator-Projektion, bei der die Punkte der Erdoberfläche vom Erdmittelpunkt aus auf einen Zylinder projiziert werden, ist winkeltreu. Sie erlaubt es beim Navigieren mit einem Kompass auf der Landkarte einer geraden Linie zu folgen.

Für Karten in einem Peters-Atlas wird jeder Punkt horizontal auf einen Zylinder projiziert. Diesen Prozess nennt man ‚Lambert-Abbildung‘, nach J. H. Lambert (1728-1777). Diese Abbildung behält das Verhältnis der Flächen bei und ermöglicht somit den direkten Größenvergleich verschiedener Länder. Das nennt man eine **flächentreue Projektion**.

C. F. Gauß (1777-1855) hat bewiesen, dass es unmöglich ist, beim Zeichnen einer Landkarte von einer Region der Erde alle Distanzverhältnisse auf einmal abzubilden.

Chaotisches Magnetpendel

Idee: Centre Sciences Orléans



Die Grafik zeigt die berechneten Start- und Endpunkte eines **Magnetpendels**. Wenn man das Pendel über einem blauen Flächenstück loslässt, sollte es an dem Magneten im blauen Feld hängen bleiben.

Wenn Sie diesen Versuch häufig wiederholen, werden Sie feststellen, dass das Pendel, trotz der Störfaktoren wie Reibung, Vibrationen und anderen Impulsen, mit erhöhter Wahrscheinlichkeit im entsprechenden Farbfeld zur Ruhe kommt.

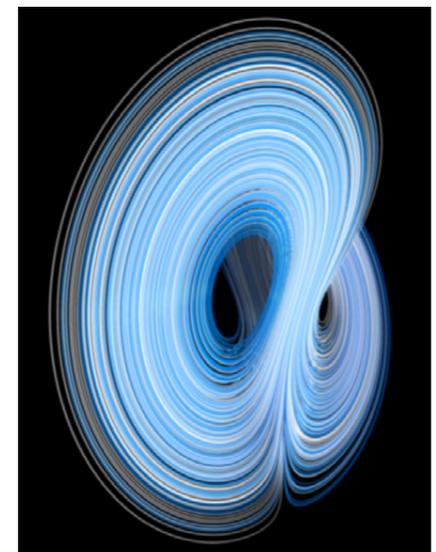
Bei einem Startpunkt in einem der fein strukturierten Bereiche können jedoch weder Sie noch der Computer eine Vorhersage darüber treffen, an welchem der drei Magnete das Pendel letzten Endes zur Ruhe kommen wird.

Ein System, dessen Endzustand eine solch empfindliche Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen besitzt, wird als **chaotisch** bezeichnet.

Auch das Wettergeschehen kann nur verstanden werden, wenn man in den mathematischen Modellen das **Chaos** berücksichtigt.

1972 hat der Meteorologe Edward Lorenz die Unmöglichkeit längerfristiger Wettervorhersagen in der Metapher ausgedrückt, dass der Flügelschlag eines Schmetterlings in Brasilien der Auslöser für einen Tornado in Texas Wochen später sein könne (Schmetterlingseffekt).

Der **Lorenz-Attraktor** (rechts) ist ein Modell, mit dem sich die chaotische, thermische Konvektion der Luft beschreiben lässt.



Kettenlinie und Parabel

Die Form einer hängenden Kette kann durch eine Gleichung beschrieben werden, die sich aus zwei spiegelsymmetrischen Hyperbeln zusammensetzt:

$$y = 0.5 \cdot (e^x + e^{-x}) \quad \text{mit } e = 2,71828\dots$$

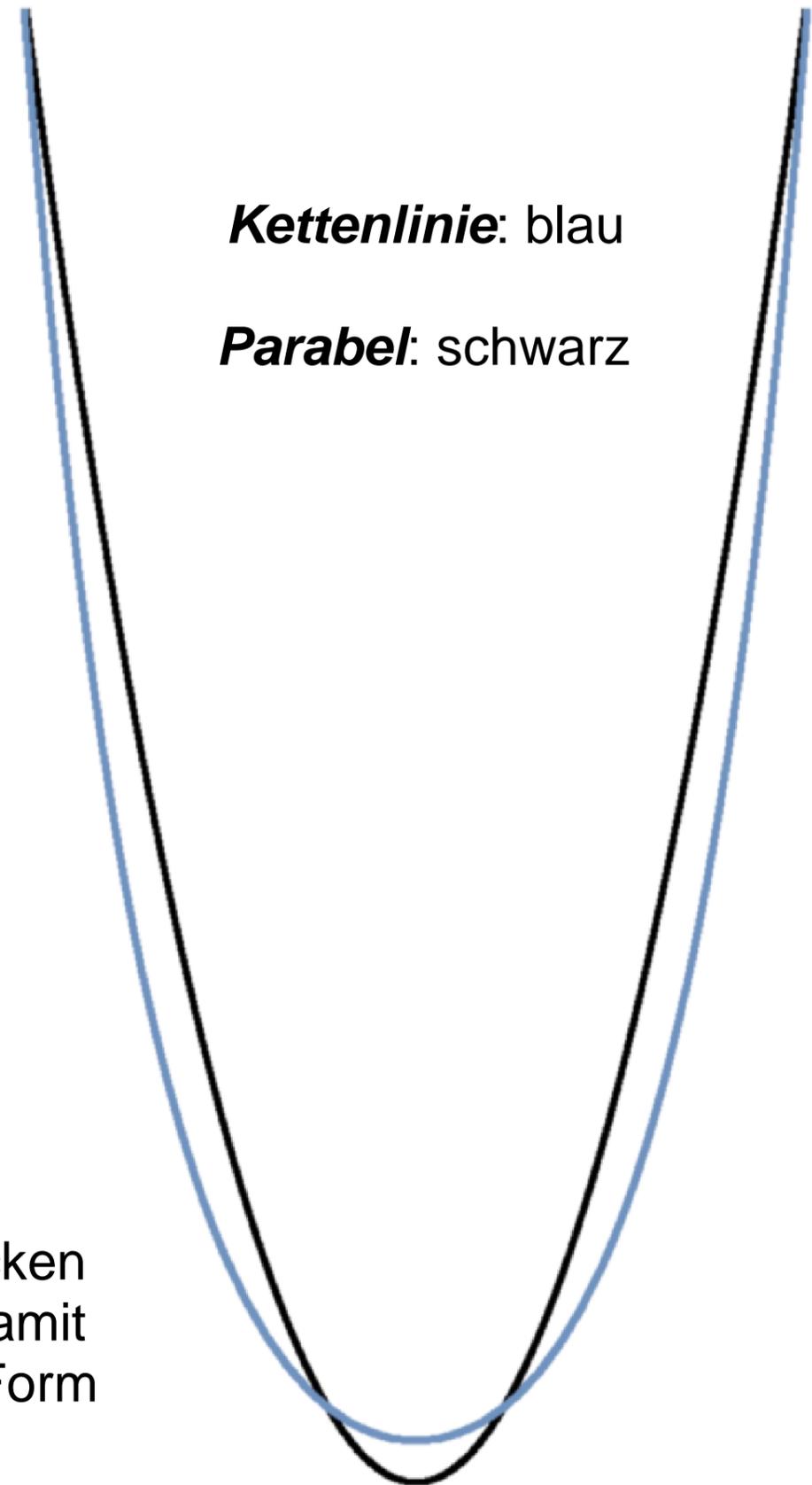
Ein unbelastetes Tragseil einer Hängebrücke hängt zunächst in der Form dieser **Kettenlinie**.

Wird das Tragseil jedoch durch vertikale Hängeseile, deren horizontale Abstände alle gleich sind, belastet, dann verwandelt sich seine Form in eine **Parabel**.

Die Parabel besitzt die Gleichung: $y = x^2$

Am **Hängebrückenmodell** kann man die Formen der Kettenlinie und des belasteten Tragseils vergleichen.

Bei der Planung der ersten wirklich großen Hängebrücken um 1930 war eine große Anzahl von Mathematikern damit beschäftigt, mit schwierigen Näherungsverfahren die Form und Stabilität des Hängewerks zu berechnen.



Polyederobjekt

Ikosaeder im Oktaeder im Tetraeder

Im Polyederobjekt sind drei der fünf **Platonischen Körper** ineinandergeschachtelt. Die Seitenflächen aller drei Körper sind gleichseitige Dreiecke.

Die Alustangen sind die Kanten eines **Tetraeders**, der aus 4 Dreiecken zusammengesetzt ist.

Die orangen Seile, die zwischen die Stangenmitten gespannt sind, bilden die Kanten eines **Oktaeders**, der 8 dreieckige Seitenflächen besitzt.

Der **Ikosaeder**, der 20 Dreiecksseiten besitzt, ist in folgender Weise in den Oktaeder eingeschrieben:

Die 12 orangen Seile, also die Kanten des Oktaeders, werden im Verhältnis des Goldenen Schnitts in einen größeren Teil (**L**) und einen kleineren Teil (**S**) unterteilt.

Das Verhältnis **L:S** besitzt den Wert $1,618\dots$ bzw. $0,5(1+\sqrt{5})$. Es entspricht dem Verhältnis einer Fünfeckdiagonalen zu einer Fünfeckseite in einem regelmäßigen Fünfeck.

Wenn man die Orientierungen der Unterteilungen richtig wählt, dann bilden die 12 Punkte, an denen sich **L** und **S** berühren, die 12 Ecken eines Ikosaeders mit 20 Dreiecksseiten.

Für alle drei Polyeder gilt die Eulersche Polyederformel $K = E + F - 2$, die die Anzahl der Kanten (**K**), zur Anzahl der Ecken (**E**) und Flächen (**F**) in Beziehung setzt.

