La geometría de las superficies “suaves”

Superficies regulares

Una superficie es un objeto geométrico de dimensión 2 (con dos grados de libertad). Puede pensarse en ella como un elemento plano al que se deforma para dotarle de una determinada configuración. Algunos ejemplos son el plano, el cilindro, la esfera, el toro (así se llama en matemáticas a la superficie del flotador), el elipsoide (el balón de rugby),… Estos ejemplos son superficies “suaves” (en matemáticas, regulares), en particular, sin bordes, ni picos.

La Geometría Diferencial es la rama de las matemáticas que estudia las superficies regulares (y también los espacios geométricos de cualquier dimensión), y aplica dicho estudio en otras partes de las matemáticas y en otras ciencias. Sus herramientas básicas son el cálculo diferencial e integral, el álgebra lineal y, por supuesto, la geometría.

Groucho: ¿Cuál es la forma de la Tierra?
Harpo: Pues no lo sé.
Groucho: Bien, veamos, ¿cuál es la forma de mis gemelos?
Harpo: Cuadrada.
Groucho: No los gemelos de diario, sino los que yo visto los domingos.
Harpo: Ah, redonda.
Groucho: Muy bien, ¿cuál es la forma de la Tierra?
Harpo: Cuadrada entre semana y redonda los domingos.

Los Hermanos Marx , “Fun in High Skule” (1910)

La curvatura

Un elemento importante en el estudio de las superficies regulares es la curvatura, es decir, la forma en que las superficies se curvan en el espacio.

En el siglo XIX, los matemáticos descubrieron que podían definirse dos curvaturas, que conjuntamente medían cómo se comban las superficies, las conocidas como “curvatura de Gauss” K y “curvatura media” H. El matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855) demostró que la curvatura que lleva su nombre mide la curvatura intrínseca de la superficie (es decir, la curvatura que un habitante de la misma puede percibir desde dentro, sin mirar al espacio exterior). Sin embargo, la curvatura media es extrínseca, ofrece una medida de la relación de la superficie con el espacio exterior.

Así la ondulación que percibimos al mirar a una superficie viene dada por ambas curvaturas. Por ejemplo, en una superficie de curvatura media nula, H=0, es consecuencia de su curvatura interna.

Después de eso, modestamente presenté la solución que habíamos encontrado para el sorprendente problema de que la suma de los tres ángulos de un triángulo en nuestro espacio superaba los 180º… si lo entiendo bien, nuestro espacio es curvado, curvado del todo,… una superficie esférica de dos dimensiones.

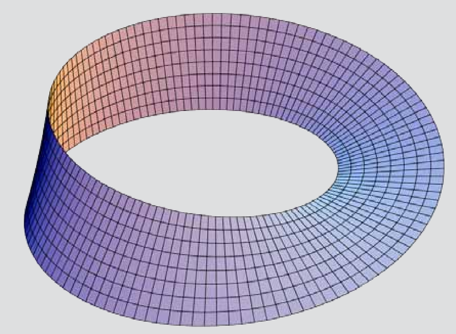
Dionys Burger, Esferalandia (1965).

Superficies no orientables

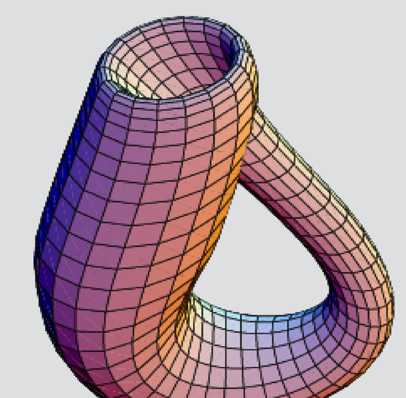
De forma intuitiva, la orientabilidad de una superficie puede verse en función de que esta tenga una o dos caras.

Si se pegan los extremos de una cinta alargada (por ejemplo de papel) se obtiene una banda normal. Es una superficie que tiene dos caras, la exterior y la interior, como la mayoría de las superficies, y por lo tanto es orientable.

Sin embargo, si antes de pegar los extremos se da media vuelta a uno de ellos se obtiene una banda de Moebius (figura), que es una superficie no orientable (solamente tiene una cara) y no cerrada (que tiene borde). Para comprobar que solamente tiene una cara puede recorrerse la banda de papel con un lápiz, y cuando se regrese al punto inicial se comprobará que se ha recorrido la banda entera.

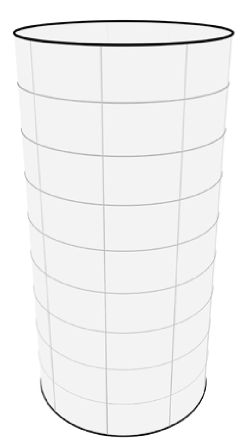


Dos ejemplos de superficies no orientables cerradas (sin borde) son el plano proyectivo y la botella de Klein (la figura es una representación de esta superficie en en espacio tridimensional).

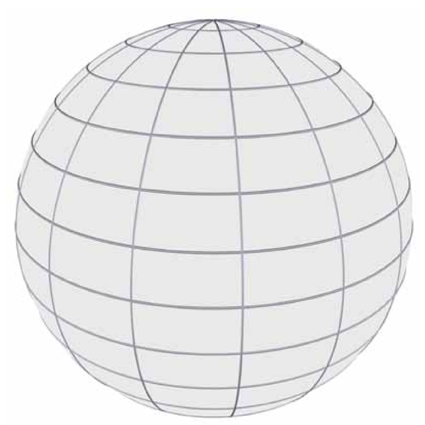


Deseoso de captar su atención, me había propuesto levantar en dos tiempos una barra equivalente en peso a un par de Steinways cuando de pronto mi columna vertebral adoptó la forma de una banda de Möbius, y buena parte de mi cartílago se separó audiblemente.

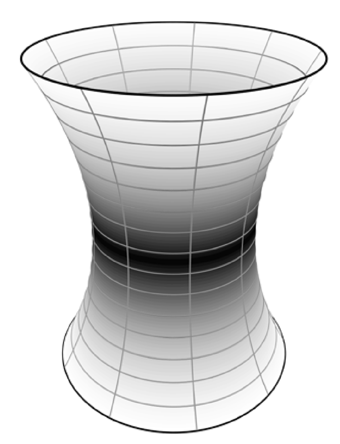
Woody Allen, Pura Anarquía (2007)



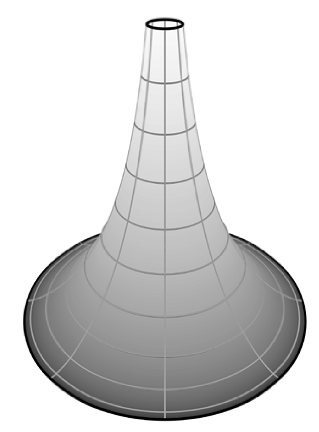
Cilindro



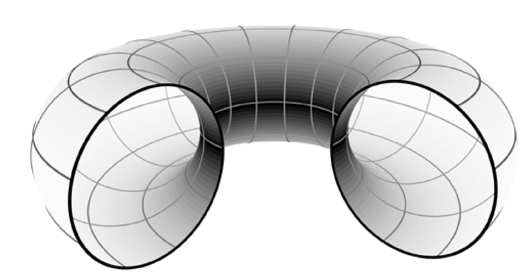
Esfera



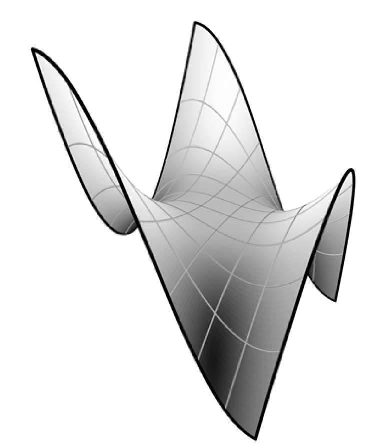
Catenoide



Seudoesfera



Toro



Silla de montar