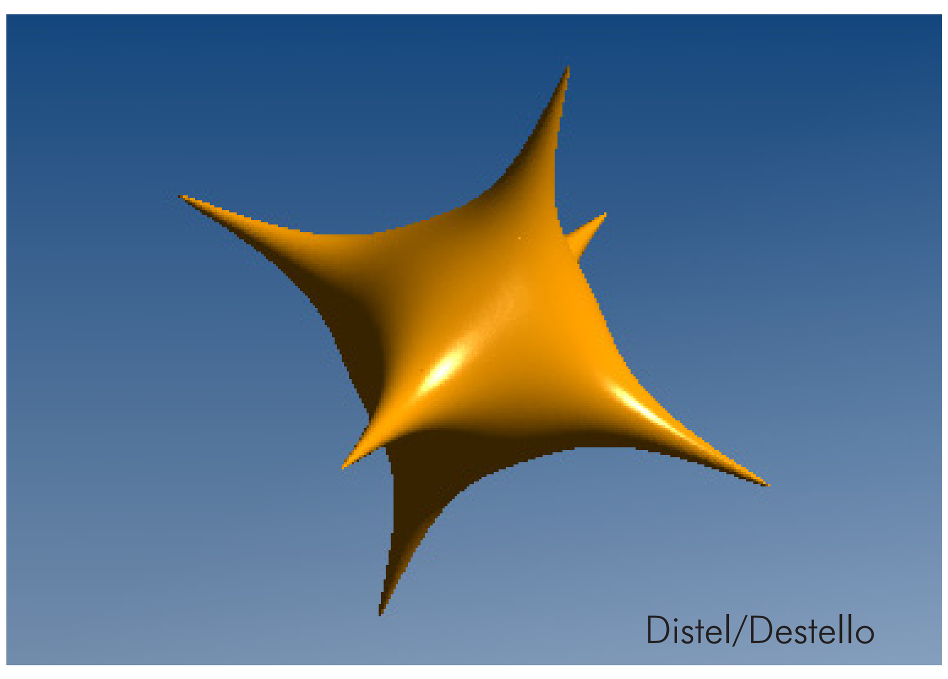
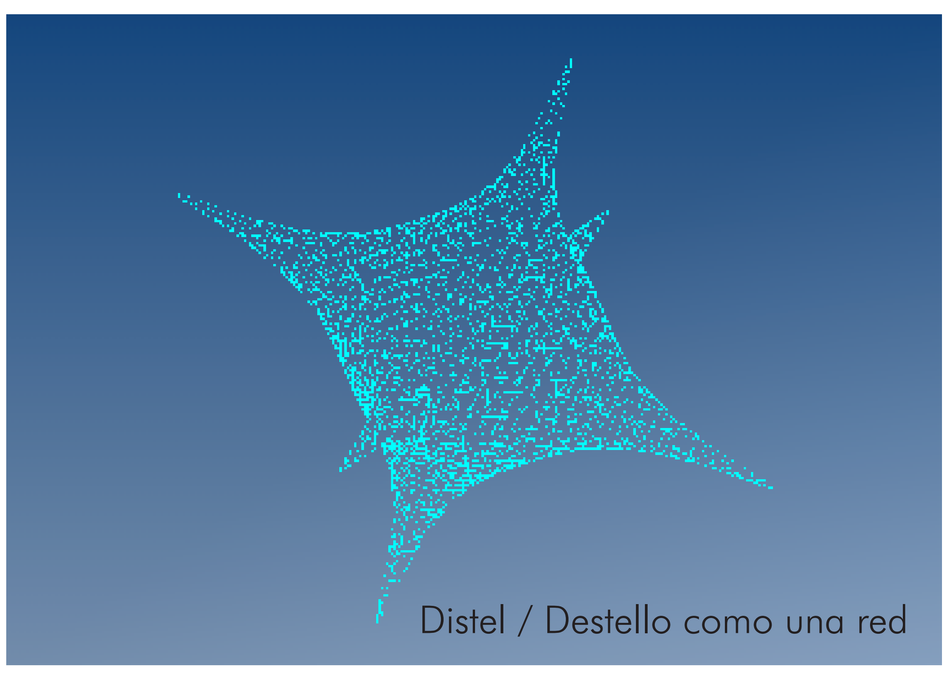
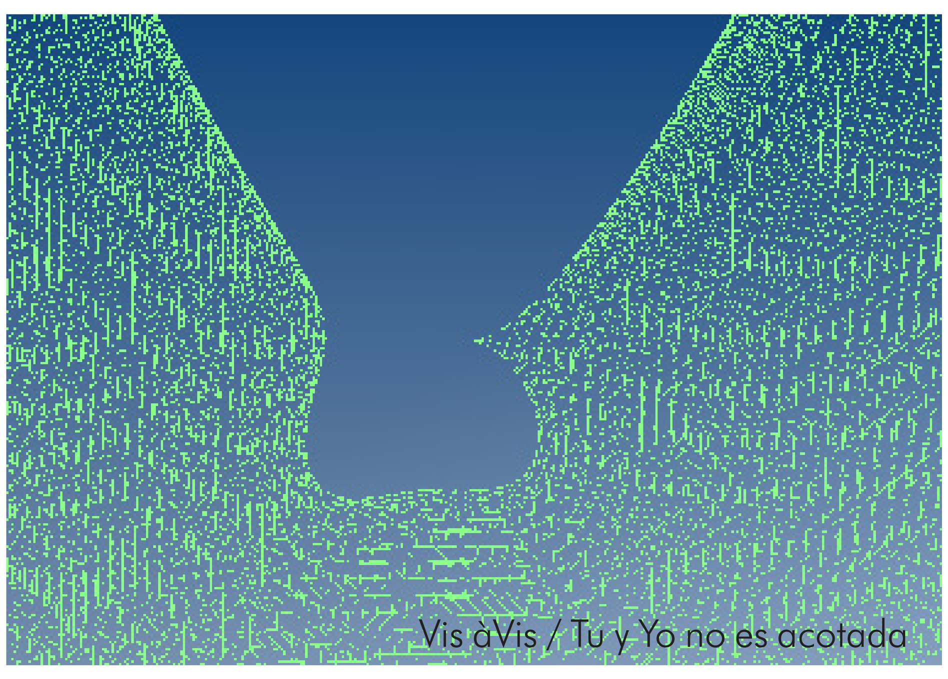
Esculturas

Impresión 3D de superficies algebraicas

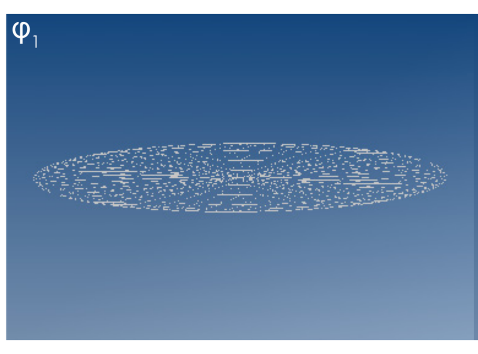
de la fórmula a la escultura

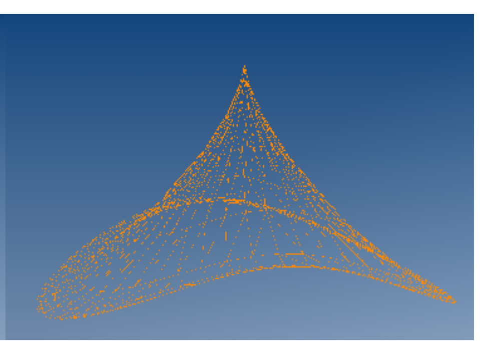

Distel/Destello


Distel / Destello como una red

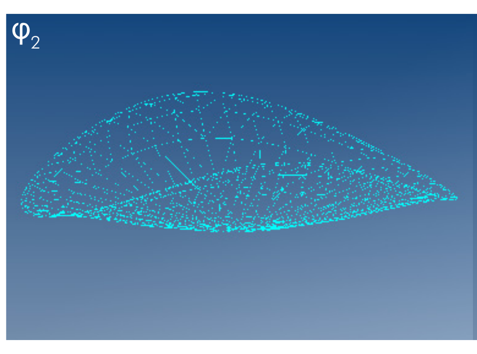

Vis àVis / Tú y Yo no es acotado

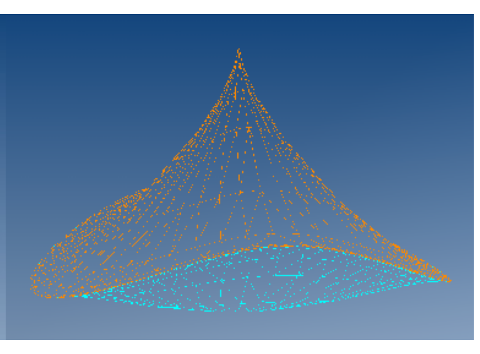
ϕ_1

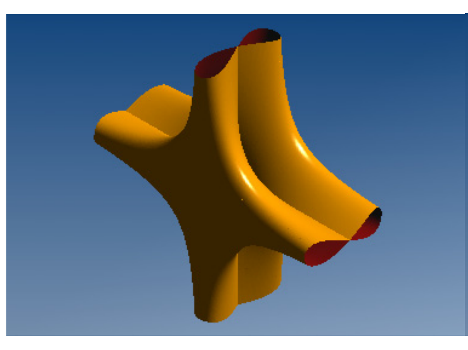

Estirando una trozo de goma ...

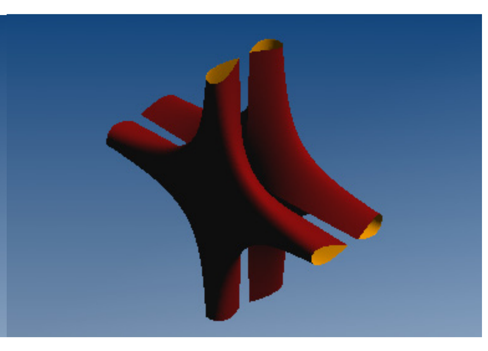

... se puede obtener una colina...

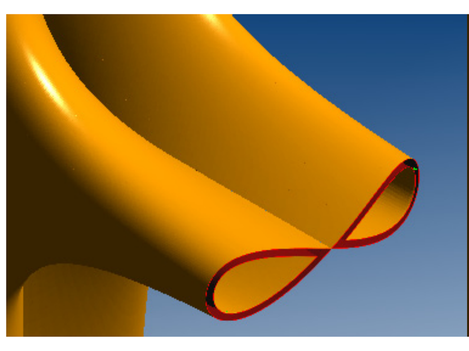
ϕ_2

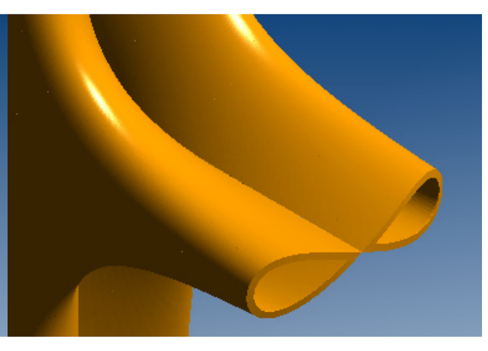

... o un valle en cualquier punto ...


... y obtener Nepalí.

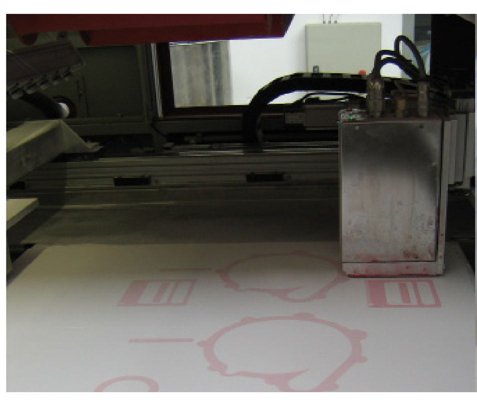

Helix/Hélice no encierra volumen, ...

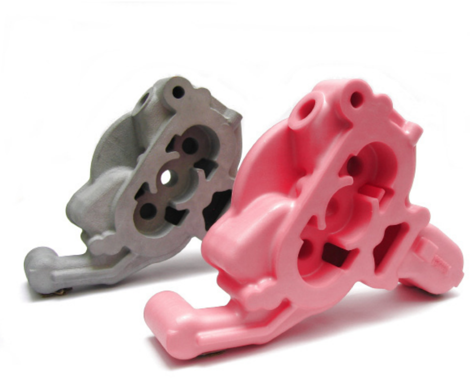

... pero con una superficie offset, ...


... y borde en los extremos ...


... se obtiene datos imprimibles, ...


... y por fin una escultura real.




Impresión 3D (Prototipado Rápido)

Los diversos lenguajes de las superficies algebraicas y las impresoras 3D

Aunque las superficies algebraicas están formadas por una infinidad de puntos, se pueden describir concisa y elegantemente como los ceros de un polinomio. Pero una impresora 3D necesita otros datos para producir un modelo, como una red de pequeños triángulos, frecuentemente cientos de miles de ellos, que en conjunto aproximan la superficie. Las esculturas que se pueden ver en la vitrina fueron obtenidas con impresión 3D usando datos calculados por FORWISS (Instituto Sistemas Informáticos para Aplicaciones Técnicas del Departamento de Tecnologías de la Información de la Universidad de Passau) para IMAGINARY.

Más finas que una pompa de jabón

Las esculturas han de ser acotadas y encerrar un volumen. Sin embargo, las superficies algebraicas son infinitamente delgadas y frecuentemente se extienden hasta el infinito. Algunas superficies, como Nepalí, son acotadas y encierran un volumen, y esto permite representar en el ordenador la superficie que encierra dicho volumen. Otras superficies, como Vis-à-Vis/Tú y Yo, son no acotadas (no tienen interior ni exterior), y no son por tanto la superficie de ningún objeto físico. La materialización de tales superficies en una escultura es una tarea mucho más delicada.

La búsqueda (in)finita de la superficie

Para determinar (aproximadamente) los puntos de una superficie se puede usar el método de los cubos. Se divide el espacio en una malla de millones de pequeñas cajas, todas iguales. El polinomio que da la ecuación de la superficie es entonces evaluado en los vértices de estas cajas. Si los valores para una caja dada tienen el mismo signo, el algoritmo supone que dicha caja no contiene puntos de la superficie. En caso contrario, la caja debe contener puntos de la misma, y se puede construir una red de triángulos dentro de la caja que separa los valores positivos y negativos. Estas redes, en su conjunto, proporcionan una buena aproximación de la superficie y se pueden usar para obtener impresiones 3D de algunas superficies algebraicas, como Dullo, Zitrus/Limón o Kreisel/Peonza. Pero el método de los cubos no es apropiado para todas las superficies, ya que dobles cambios de signo en puntos muy próximos pueden fácilmente pasar inadvertidos, y eso produce resultados espúreos.

Cómo se forma una montaña con un trozo de goma

En el caso de algunas superficies algebraicas se puede usar un método distinto. En ocasiones, como en el caso de Nepalí, la ecuación $f(x, y, z)=0$ se puede resolver respecto de z. En lugar de la ecuación implícita tendremos varias funciones explícitas $z = \phi_i(x,y)$. En el caso de Nepalí, bastan dos funciones, ϕ_1 y ϕ_2. Imaginemos ahora un trozo de goma circular plano en el suelo. En cada punto (x, y) de la goma, podemos levantarla hasta la altura $z=\phi_1(x,y)$. De esta manera surge la montaña de Nepalí. Un segundo trozo de goma, estirado hasta $z=\phi_2(x,y)$, nos da el valle la parte inferior de Nepalí.

Cómo se puede ver una superficie que no encierra volumen: un modelo a partir de un grano de arena

Las superficies Helix/Hélice y Vis à Vis / Tú y Yo tienen una característica común: no están acotadas, no tienen interior ni exterior y no encierran volumen. El truco explicado anteriormente para "ver" la forma de la superficie de un sólido no funciona en estos casos: la impresora 3D tendría que producir un modelo con menos material que un grano de arena... Es por ello que los datos para construir estos modelos se calcularon, de nuevo con el método de los cubos, después de engrosar las superficies originales por uno de sus lados.

La medida de distancias es importante cuando se trata de comprobar si un objeto difiere de su reconstrucción. Usando 'tijeras digitales', la superficie original y la offset de la "engrosada" se pueden hacer corresponder coordinadamente y los espacios entre los bordes de ambas se pueden cerrar insertando triángulos. Notemos que mientras Vis à Vis / Tú y Yo tiene un único borde, Helix / Hélice tiene ocho pares de contornos que tienen que ser cerrados con triángulos. Después de estas operaciones, la superficie offset, los rebordes y la superficie original quedan representados por una red de triángulos que incluye un delgado volumen, y es esta red la que se envía a la impresora 3D.

Socios/patrocinadores: las esculturas fueron creadas para la exposición por Alphaform y Voxeljet Technology. Los datos 3D fueron compilados por el Instituto FORWISS de la Universidad de Passau.

SPONSORED BY THE Federal Ministry of Education and Research

UNIVERSITÄT PASSAU

voxeljet technology

FORWISS Universität Passau

ALPHAFORM

Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach

Real Sociedad Matemática Española

FECYT FUNDACIÓN ESPAÑOLA PARA LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA

GOBIERNO DE ESPAÑA MINISTERIO DE CIENCIA E INNOVACIÓN

REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA CENTENARIO 1911 // 2011