

Dirichletreihen

John E. McCarthy^[1]

Primzahlen sind für Mathematiker von großem Interesse. In diesem Snapshot diskutieren wir einige Fragen zur Verteilung von Primzahlen und führen bestimmte unendliche Reihen ein, mit deren Hilfe wir diese studieren können.

1 Konvergente Reihen

Eine *Reihe* ist eine Folge von Termen, die aufaddiert werden, z.B.

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100,$$

eine Reihe mit 100 Termen.^[2] Eine Reihe kann aus endlich vielen Termen bestehen; in diesem Fall möchte man eine Formel bestimmen, sodass man die Summe entweder exakt oder näherungsweise berechnen kann. Es kann sich aber auch um eine so genannte unendliche Reihe handeln, dann besteht sie aus unendlich vielen Termen, Wir verwenden die Schreibweise a_n für den n -ten Term der Reihe, wir betrachten also Reihen der Form

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots \tag{1}$$

^[1] Zum Teil finanziert durch National Science Foundation Grant DMS 1300280

^[2] Diese Reihe wurde angeblich dem Schuljungen Carl Friedrich Gauß (1777–1855) als Aufgabe gestellt, um ihn zu beschäftigen, aber er fand eine geschickte Lösung, um die Summe schnell zu berechnen. Können Sie erkennen, wie man die Summe ohne großen Aufwand berechnen kann?

Wie können wir Gleichung (1) verstehen? Wie kann man unendlich viele Terme aufsummieren? Nehmen wir als Beispiel $a_n = \frac{1}{2^n}$. Das ergibt die Reihe

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \quad (2)$$

Stellen Sie sich vor, Sie haben einen Stock der Länge 1 in den Boden gesteckt. Nun stapeln Sie daneben Ziegelsteine aufeinander. Der erste Stein ist $\frac{1}{2}$ hoch, der zweite hat die Höhe $\frac{1}{2^2}$, der dritte die Höhe $\frac{1}{2^3}$, und so weiter. Mit jedem neuen Stein vergrößert sich die Gesamthöhe des Stapels um genau den halben Abstand zur Spitze des Stocks. Daraus folgt, dass der Stapel Ziegelsteine niemals höher als 1 sein wird, auch wenn man immer mehr Steine aufeinander stapelt. Andererseits wird die Höhe des Stapels jeden Wert kleiner als 1 irgendwann übersteigen. Daher sagen wir, dass die Reihe (2) zum Wert 1 *konvergiert*. Das bedeutet also, dass man durch Hinzunahme ausreichend vieler Terme beliebig nah an den Wert 1 herankommen kann, obwohl man ihn nie erreicht. ^[3]

2 Divergente Reihen

Nicht alle unendlichen Reihen konvergieren. Beispielweise wächst die Reihe $1 + 1 + 1 + \dots$ offenbar über alle Grenzen. In diesem Fall sagen wir, dass die Reihe *divergiert*. Ein subtileres Beispiel ist die harmonische Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$, welche ebenfalls divergiert. Dies können wir sehen, indem wir die Terme der Reihe gruppieren:

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \dots \\ \geq & 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) + \dots \\ = & 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} \right) + \dots \\ = & \infty. \end{aligned}$$

Die Reihe $1^2 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$ konvergiert. Um dies einzusehen, zeigen wir, dass sie termweise kleiner ist als eine andere Reihe, deren endliche Summe wir berechnen

^[3] Gegen welchen Wert konvergiert $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots$

können. Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ gilt:

$$\begin{aligned}
 & 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \\
 < & 1 + \frac{1}{(1)(2)} + \frac{1}{(2)(3)} + \frac{1}{(3)(4)} + \dots + \frac{1}{(n-1)(n)} \quad (3) \\
 = & 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\
 = & 1 + 1 - \frac{1}{n} \quad (4) \\
 \leq & 2.
 \end{aligned}$$

Dabei ergibt sich (4) daraus, dass sich in der vorigen Zeile etliche Terme aufheben — die Terme $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ heben sich auf, ebenso $-\frac{1}{3}$ und $+\frac{1}{3}$, und so weiter, bis sich $-\frac{1}{n-1}$ im vorletzten Term gegen $\frac{1}{n-1}$ im letzten Term aufhebt. Eine solche Summe nennt man eine *Teleskopreihe*, da sie an das Zusammenklappen eines Teleskops erinnert, bei dem nur der erste und letzte Teil übrig bleiben.

Daraus folgt, dass die unendliche Reihe $1^2 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$ konvergieren muss, und zwar gegen eine Zahl kleiner als 2. Im Jahre 1735 berechnete Leonhard Euler (1707–1783) den exakten Wert der Summe. Er bewies, dass

$$1^2 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}. \quad (5)$$

Außerdem konnte er zeigen, dass

$$1^4 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90}. \quad (6)$$

Die Riemannsche Zeta-Funktion, benannt zu Ehren von Bernhard Riemann (1826–1866), ist für alle $s > 1$ durch

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots$$

definiert. Euler konnte eine Formel für $\zeta(s)$ bestimmen, falls s eine positive gerade Zahl ist. Er zeigte, dass der Wert der Zeta-Funktion in diesem Fall immer durch eine rationale Zahl mal π^s gegeben ist, genau wie in (5) und (6). Daraus ergibt sich sogleich die Frage, ob $\zeta(3)$, die Summe der Inversen aller dritten Potenzen, gleich einer rationalen Zahl mal π^3 ist? Niemand weiß es.

3 Dirichletreihen

Die Riemannsche Zeta-Funktion ist das erste und wichtigste Beispiel einer *Dirichletreihe*, benannt nach dem Mathematiker Johann Peter Gustav Lejeune

Dirichlet (1805–1859). Man erhält eine Dirichletreihe, indem man zuerst eine Folge von Zahlen $a_1, a_2, a_3, \dots$, wählt und dann die Funktion f betrachtet, welche durch die unendliche Reihe

$$f(s) = a_1 + \frac{a_2}{2^s} + \frac{a_3}{3^s} + \dots$$

definiert ist. Die Riemannsche Zeta-Funktion ist eine Dirichletreihe, die der Folge $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1, \dots$ entspricht.

Dirichletreihen treten auf, wenn man die Verteilung von Primzahlen untersucht. Vor 2300 Jahren zeigte Euklid, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Da 2 die einzige gerade Primzahl ist, muss es unendlich viele ungerade Primzahlen geben. Aber gibt es auch unendlich viele Primzahlen, die beim Teilen durch 3 den Rest 1 hinterlassen? Dirichlet entwickelte die Theorie dessen, was wir heute als Dirichletreihen bezeichnen, um dieses und ähnliche Probleme zu lösen. Im Jahr 1837 konnte er die Theorie benutzen, um das folgende Ergebnis zu beweisen: Wenn n eine natürliche Zahl größer als 1 ist, und r eine Zahl zwischen 1 und $n - 1$ ist, die keine gemeinsamen Teiler (außer 1) mit n besitzt, dann gibt es unendlich viele Primzahlen, die beim Teilen durch n den Rest r hinterlassen. In Formeln ausgedrückt heißt das, für jedes $r \in \{1, \dots, n - 1\}$ mit $\gcd(r, n) = 1$, gibt es unendlich viele Primzahlen p , sodass

$$p \equiv r \pmod{n},$$

wobei $\gcd(r, n)$ für den größten gemeinsamen Teiler von r und n steht.

Wir stellen uns die Frage, wie viele Primzahlen es gibt, die kleiner als x sind, wobei x eine große Zahl sein soll. Die Antwort darauf gibt der Primzahlsatz, der 1793 von Gauß als Vermutung aufgestellt wurde und 1896 von Jaques Hadamard (1865–1963) und Charles-Jean de la Vallée-Poussin (1866–1962) bewiesen wurde. Die Anzahl der Primzahlen kleiner als x ist ungefähr gleich $\frac{x}{\ln x}$, wobei $\ln x$ den natürlichen Logarithmus von x bezeichnet.

Wie gut ist diese Näherung? Dies ist eines der größten ungelösten Probleme der Mathematik. Es ist bekannt, dass ihre Güte von Eigenschaften der Riemannschen Zeta-Funktion abhängt. Die Riemannsche Hypothese, von Riemann im Jahre 1859 aufgestellt, würde nach sich ziehen, dass die Näherung in einem bestimmten Sinne sehr gut ist. Jedoch wissen wir trotz großer Anstrengungen von Mathematikern aus aller Welt auch nach fast zwei Jahrhunderten noch nicht, ob die Riemannsche Hypothese wahr ist oder nicht.

John E. McCarthy ist Professor für
Mathematik an der Washington University
in St. Louis.

Mathematische Gebiete
Analysis

Lizenz
Creative Commons BY-NC-SA 3.0

DOI
10.14760/SNAP-2014-001-DE

Schnappschüsse moderner Mathematik aus Oberwolfach werden von Teilnehmerinnen und Teilnehmern des wissenschaftlichen Programms des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach (MFO) geschrieben. Das Schnappschuss-Projekt hat zum Ziel, Verständnis und Wertschätzung für moderne Mathematik und mathematische Forschung in der allgemeinen Bevölkerung weltweit zu fördern. Es ist Teil des Mathematik-kommunikation-Projekts „Oberwolfach trifft IMAGINARY“, welches von der Klaus Tschira Stiftung und der Oberwolfach Stiftung gefördert wird. Alle Schnappschüsse können unter www.imaginary.org sowie unter www.mfo.de/snapshots abgerufen werden.

Editor/in
Lea Renner
junior-editors@mfo.de

Chefeditor/in
Carla Cederbaum
senior-editor@mfo.de

Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach gGmbH
Schwarzwaldstr. 9–11
77709 Oberwolfach
Deutschland

Direktor/in
Gerhard Huisken



Mathematisches
Forschungsinstitut
Oberwolfach



Leibniz-Gemeinschaft

Klaus Tschira Stiftung
gemeinnützige GmbH



oberwolfach
FOUNDATION

IMAGINARY
open mathematics