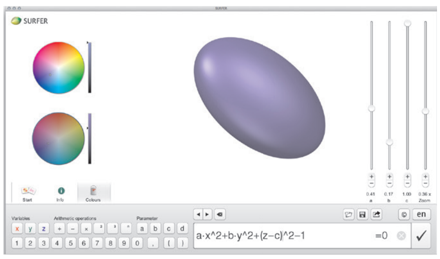
SURFER

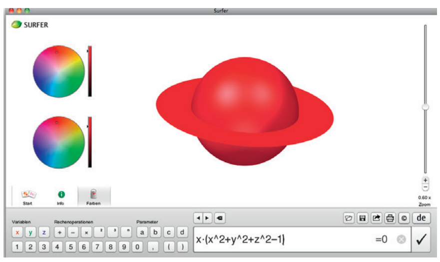
EXPERTENTRICKS

»Gibt es irgendwelche Tricks, wie man der Formel ansehen kann, was hinterher für eine Fläche rauskommt?« Im Allgemeinen ist es sehr schwierig bis unmöglich, an der Formel die Gestalt der resultierenden Fläche direkt abzulesen. Es gibt allerdings einige »Expertentricks« mit denen man durch Kombination von bekannten Flächen neue, kompliziertere Flächen und Formeln erschaffen kann.

Die meisten Nutzerinnen und Nutzer von SURFER werden so vorgehen, dass sie eine Fläche mit bekannter Formel f (zum Beispiel f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1=0 für die Kugel) wählen und diese durch Drehen und Zoomen mit dem senkrechten Schieberegler in eine schöne Form bringen. Verwendet man in der Formel die Buchstaben a,b,c oder d, so erscheinen weitere Schieberegler, mit denen man diese Parameter und damit die Fläche verändern kann. Zusätzlich gibt es verschiedene Techniken, um Flächen zu kombinieren:

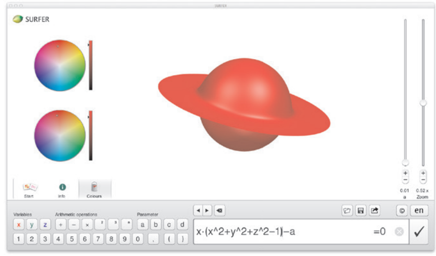


1. MEHRERE FLÄCHEN GLEICHZEITIG:



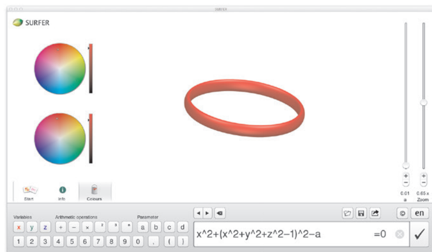
Hat man zwei Flächen mit den zugehörigen Formeln f und g gegeben, so erhält man durch Multiplikation f*g=0 die Vereinigung der beiden Flächen f=0 und g=0, d.h. es werden die beiden ursprünglichen Flächen gleichzeitig angezeigt. Überschneiden sich die beiden Flächen, so entsteht am Übergang normalerweise eine Kante (mathematisch gesprochen sagt man, die Fläche ist an dieser Stelle singulär oder nicht glatt).
Zum Beispiel ist x*(x^2+y^2+z^2-1)=0 die Vereinigung der Ebene mit einer Kugel, und das sieht (innerhalb der Umgebungskugel von SURFER) wie Saturn mit einem Ring aus.

2. VERSCHMELZEN VON KOMPONENTEN:

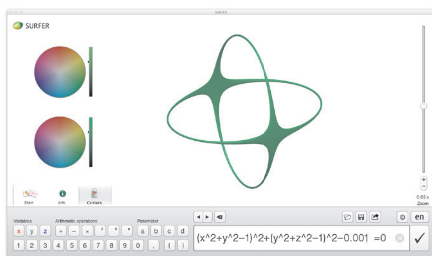


Subtrahiert man von einer Formel f eine Konstante, sagen wir a, so wird durch f(x,y,z)-a=0 die Fläche f(x,y,z)=0 abgeändert, insbesondere werden ihre Spitzen (Singularitäten) geglättet.
Ändert man z.B. die Vereinigung zweier Flächen, die als Produkt f*g gegeben ist, in die Formel f*g-a = 0, so wird die Fläche längs der Schnittkurve geglättet, und die beiden Komponenten f=0 und g=0 verschmelzen zu einer Komponente. Man kann diesen Glättungsprozess sehr schön beobachten, wenn man in unserem Saturnbeispiel einen Parameter a einfügt, x*(x^2+y^2+z^2-1)-a=0, den man von 0 ausgehend langsam vergrößert.

3. SCHNITTKURVEN:



Sind f=0 und g=0 die Formeln zweier Flächen, die sich überschneiden, so ist f^2+g^2=0 die Formel für die Schnittkurve. Dies liegt daran, dass das Quadrat einer (reellen) Zahl niemals negativ ist, die Summe f^2+g^2 kann also an einem Punkt (x,y,z) nur dann 0 ergeben, wenn sowohl f(x,y,z)=0 als auch g(x,y,z)=0 gilt, d.h. wenn (x,y,z) auf beiden Flächen liegt.
Im SURFER kann man die Schnittkurve so noch nicht sehen, da sie unendlich dünn ist und die Visualisierungs-Software sie deshalb nicht darstellen kann. Mit einem kleinen Trick kann man sie trotzdem sichtbar machen: Einfach die Formel f^2+g^2-a mit kleinem Wert für a verwenden, so wird die Schnittkurve leicht verdickt.



Aus diesen drei Prinzipien kann man schon ohne weiteres Wissen sehr viele schöne Flächen kreieren. Je mehr Grundbausteine (neben Ebene, Kugel, Ellipsoid, etc.) man kennt oder sich überlegt, desto kompliziertere Flächen kann man basteln. Und es gibt natürlich noch viele andere Möglichkeiten, Formeln zu kombinieren!

Viele Beispiele von algebraischen Flächen mit ihren Formeln findet ihr in der Galerien der IMAGINARY-Webseite: www.imaginary.org/galleries.

Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach
Klaus Tschira Stiftung gemeinnützige GmbH
KTS