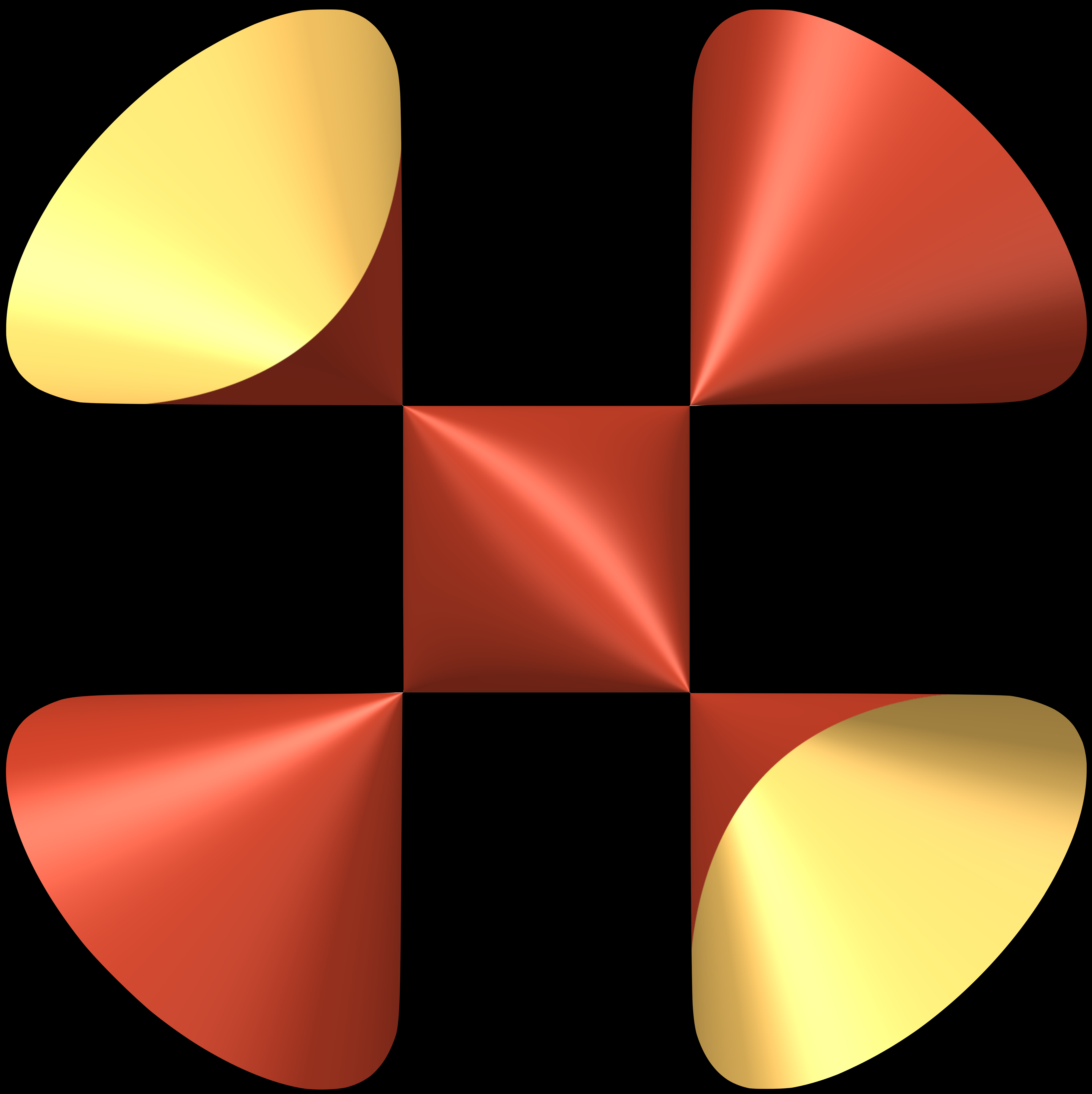
SURF ON SURFACES
Le Superfici Algebriche

A PROJECT BY IMAGINARY.ORG



La mostra sulle superfici algebriche utilizza il software **SURFER** di **IMAGINARY,** una organizzazione non-profit per la divulgazione della "open and interactive mathematics" avviata dal **Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach**, in Germania. La mostra è organizzata dal Dipartimento di Matematica e Fisica dell'Università Roma Tre, sotto la cura del Prof. L. Teresi, con la collaborazione dei dottorandi F. Anella e R. Carbone, e con l'aiuto degli studenti S. Angeloni, B. Beco, V. Cinelli, F. Fino, G. Pietrazzini, L. Zaccardelli.

IMAGINARY
open mathematics
imaginary.org

ROMA TRE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI

Dipartimento
Matematica e Fisica
Università Roma Tre

SURF ON SURFACES
Le Superfici Algebriche

A PROJECT BY IMAGINARY.ORG

$$(x^2 + 9/4 \cdot y^2 + z^2 - 1)^3 - x^2 \cdot z^3 - 9/80 \cdot y^2 \cdot z^3 = 0$$

Superficie di H. Hauser, S. Gann e C. Stussak; poster design L. Teresi

CHE COSA È LA GEOMETRIA ALGEBRICA?
Gli antichi usavano la Geometria Euclidea basata sul concetto di distanza e di proporzione; poi gli Arabi svilupparono l'algebra, e infine nel XVIII secolo Fermat e Cartesio introdussero le coordinate per descrivere relazioni geometriche: dall'uso congiunto di algebra e geometria nacque la Geometria Algebrica e lo studio delle superfici algebriche. Il cuore che vedete è prodotto da una superficie algebrica.

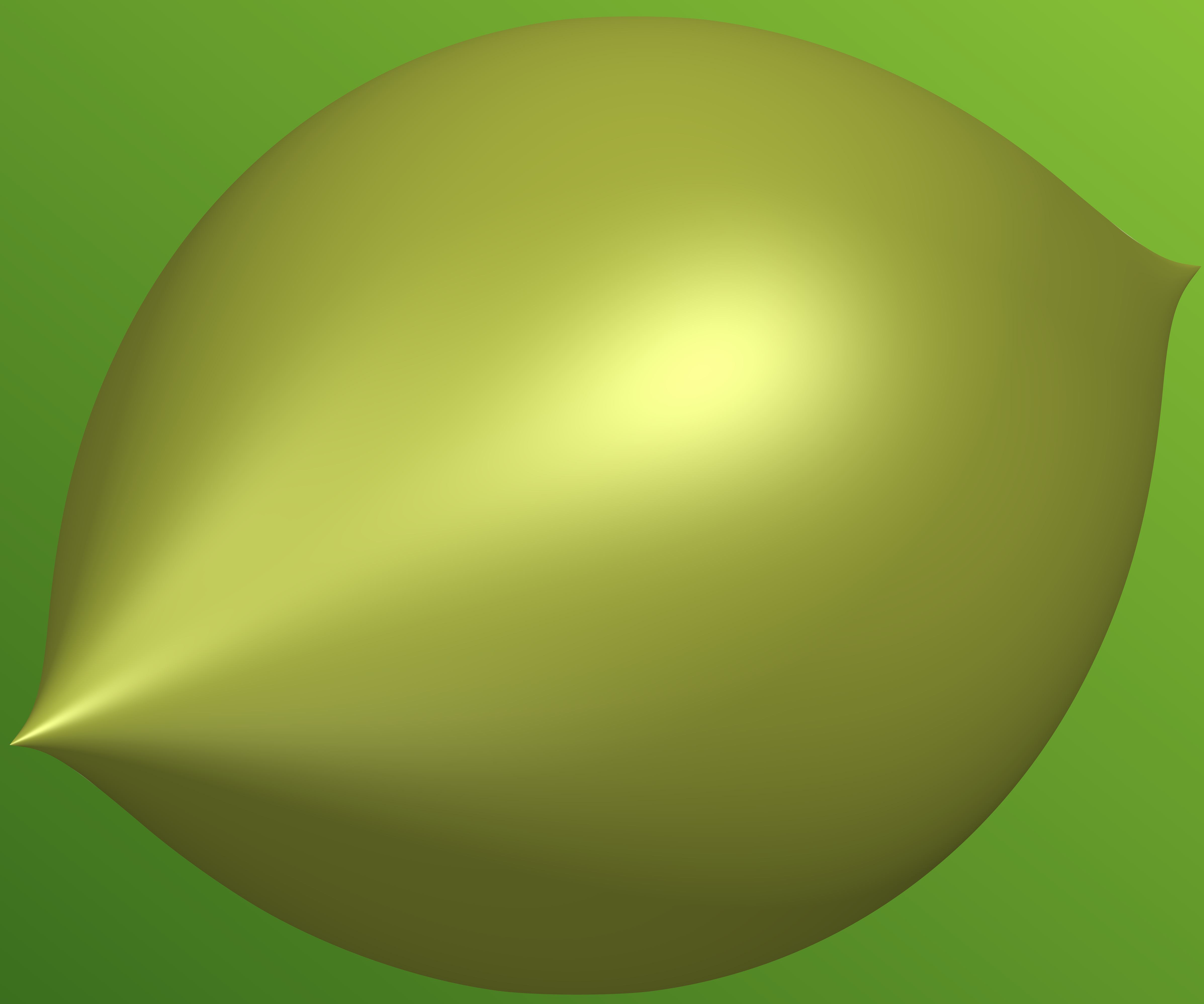
IMAGINARY
open mathematics
imaginary.org

ROMA TRE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI

Dipartimento
Matematica e Fisica
Università Roma Tre

Surf on Surfaces
Le Superfici Algebriche

A PROJECT BY IMAGINARY.ORG



$$1.2 \cdot x^2 + 1.2 \cdot z^2 - 5 \cdot (y + 0.5)^3 \cdot (0.5 - y)^3 = 0$$

Superficie di H. Hauser e S. Gann, poster design L. Teresi

SUPERFICI FISICHE E SUPERFICI ALGEBRICHE

Questa immagine sembra un limone, ma in realtà è una superficie algebrica che gli somiglia: ci aiuta a capire la forma del limone, trascurando dettagli come la rugosità e le imperfezioni. Le equazioni permettono di costruire modelli matematici delle superfici; in questo modo è possibile studiarne le proprietà utilizzando gli strumenti della matematica e scoprire cose che i nostri occhi o la nostra immaginazione non riuscirebbero a vedere.

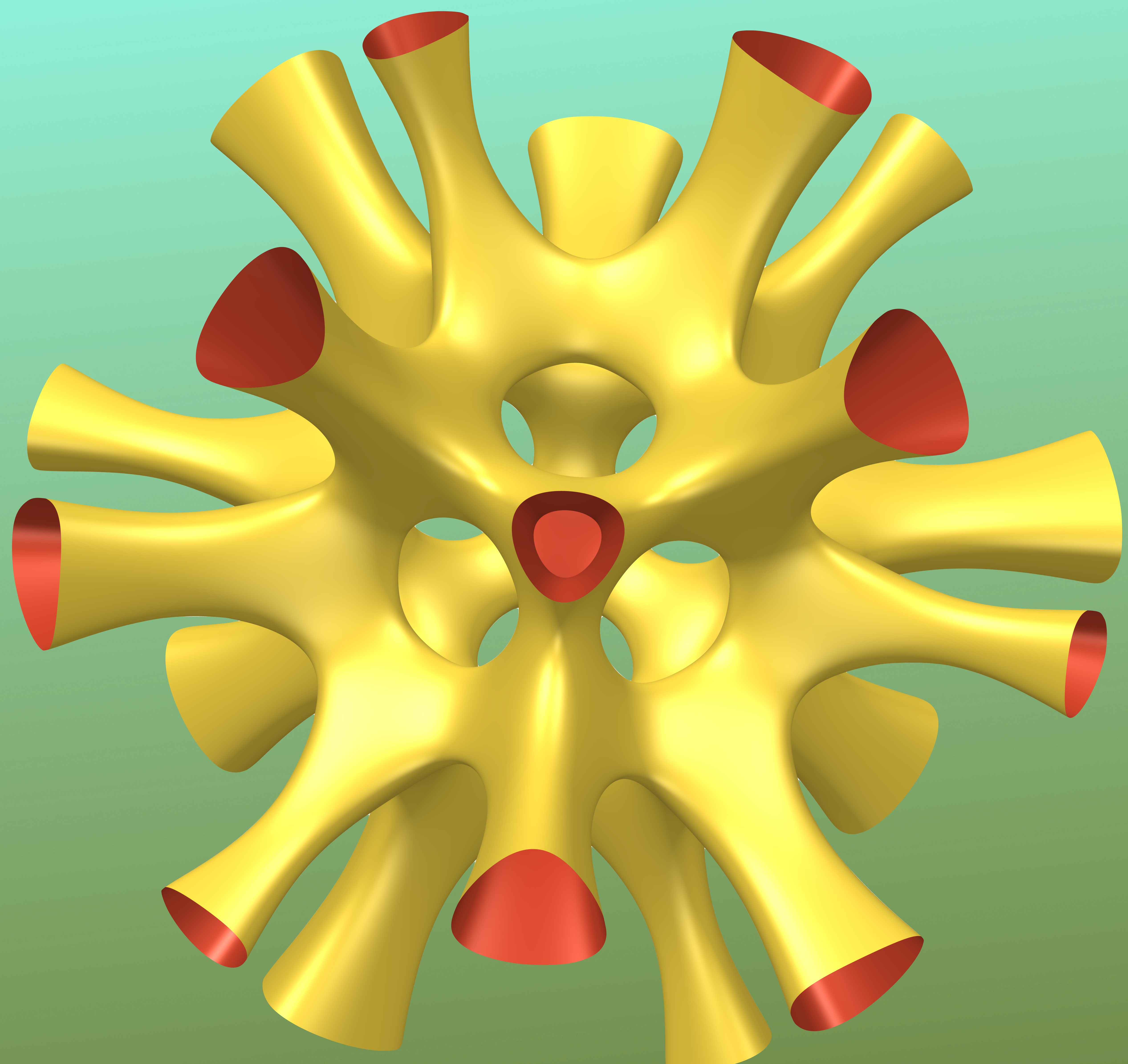
IMAGINARY
open mathematics
imaginary.org

ROMA TRE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI

Dipartimento
Matematica e Fisica
Università Roma Tre

SURF ON SURFACES
Le Superfici Algebriche

A PROJECT BY IMAGINARY.ORG



$$0.5 + 4 \cdot (2.5 \cdot x^2 - y^2) \cdot (2.5 \cdot y^2 - z^2) \cdot (2.5 \cdot z^2 - x^2) - 3 \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - 1)^2 = 0$$

Superficie di F. Anella, R. Carbone; poster design L. Teresi

COME È FATTA UNA SUPERFICIE ALGEBRICA?

In matematica una superficie è un oggetto bi-dimensionale fatto da un numero infinito di punti zero-dimensionali: non ha spessore e può estendersi infinitamente nello spazio, come quella qui sopra di cui vediamo solo una piccola parte. Molte superfici fisiche si possono descrivere tramite le superfici algebriche, dalle forme biologiche, all'architettura, agli oggetti di design.

IMAGINARY
open mathematics
imaginary.org

ROMA TRE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI

Dipartimento
Matematica e Fisica
Università Roma Tre

Surf on Surfaces
Le Superfici Algebriche

A PROJECT BY IMAGINARY.ORG

$$8 \cdot z^9 - 24 \cdot x^2 \cdot z^6 - 24 \cdot y^2 \cdot z^6 + 36 \cdot z^8 + 24 \cdot x^4 \cdot z^3 - 168 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot z^3 + 24 \cdot y^4 \cdot z^3 - 72 \cdot x^2 \cdot z^5 - 72 \cdot y^2 \cdot z^5 + 54 \cdot z^7 - 8 \cdot x^6 - 24 \cdot x^4 \cdot y^2 - 24 \cdot x^2 \cdot y^4 - 8 \cdot y^6 + 36 \cdot x^4 \cdot z^2 - 252 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 + 36 \cdot y^4 \cdot z^2 - 54 \cdot x^2 \cdot z^4 - 108 \cdot y^2 \cdot z^4 + 27 \cdot z^6 - 108 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot z + 54 \cdot y^4 \cdot z - 54 \cdot y^2 \cdot z^3 + 27 \cdot y^4 = 0$$

Superficie demo di SURFER; poster design L. Teresi

L'ALFABETO DELLE SUPERFICI

Ogni superficie algebrica è definita univocamente da un'equazione, quindi in un certo senso il vero "nome" di una superficie è la sua equazione. Le equazioni delle superfici algebriche sono scritte utilizzando un alfabeto molto semplice, composto dalle tre lettere x, y, z (le incognite), dai numeri reali (i coefficienti), dalle due operazioni elementari +, •, e dal fondamentale simbolo di uguaglianza "=". Una equazione può essere però lunghissima, come quella qui sopra.

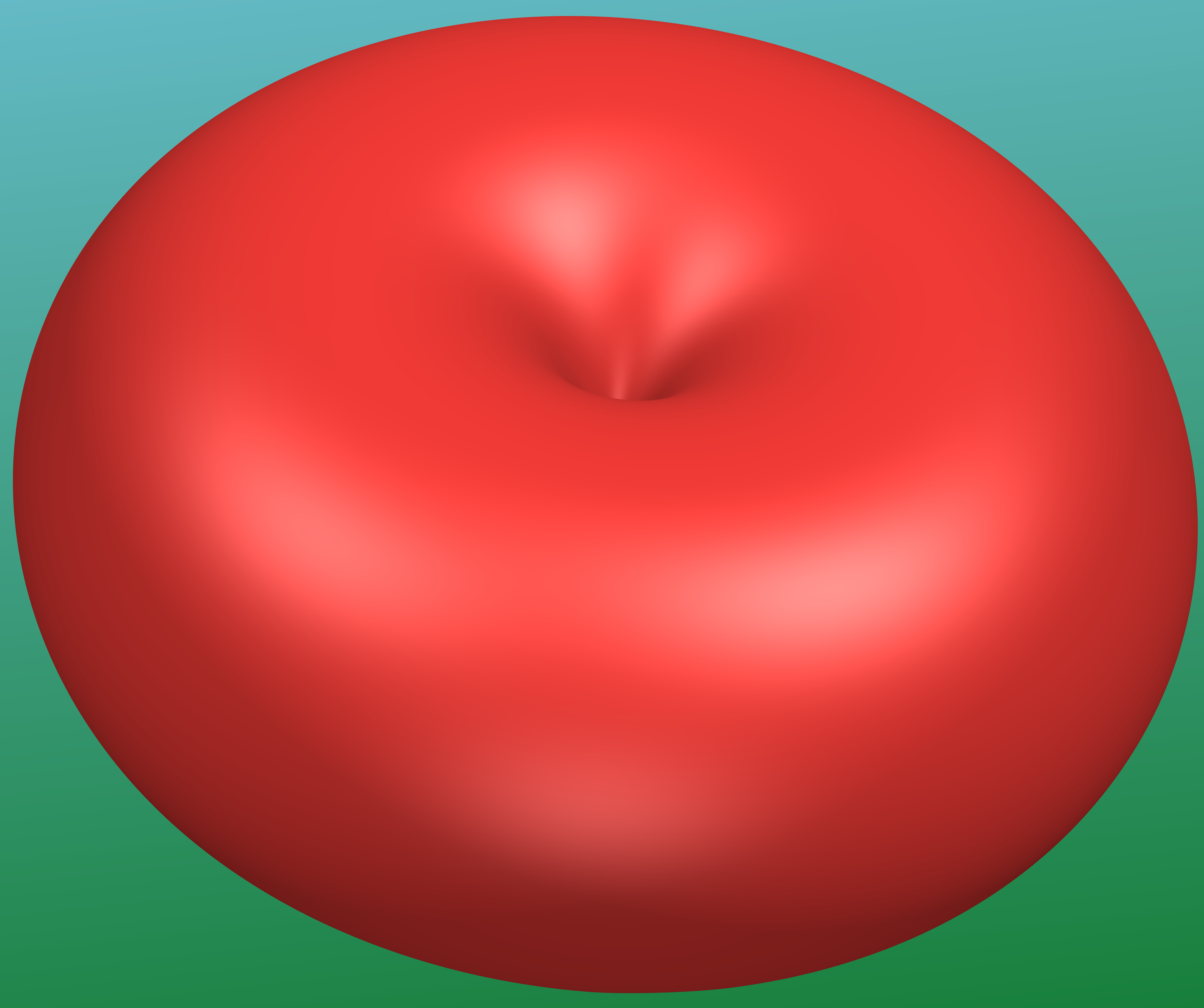
IMAGINARY
open mathematics
imaginary.org

ROMA TRE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI

Dipartimento
Matematica e Fisica
Università Roma Tre

SURF ON SURFACES
Le Superfici Algebriche

A PROJECT BY IMAGINARY.ORG



$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - b^2)^2 - 4 \cdot b^2 \cdot (x^2 + y^2) = 0$$

Superficie di H. Hauser, S. Gann; poster design L. Teresi

MELA O CIAMBELLA?

Somiglia più a una ciambella o una mela? Ovvero: ha un buco in mezzo oppure no? In questo caso è difficile rispondere senza l'aiuto della matematica, poiché non sempre da una immagine si possono dedurre queste informazioni geometriche. Per rispondere, i matematici devono studiare la sua equazione con degli strumenti algebrici. La risposta dipende dal valore dei coefficienti "a" e "b". L'immagine che vedete è ottenuta con "a>b": si tratta di una ciambella; inoltre, da questa equazione non avrete mai una mela.

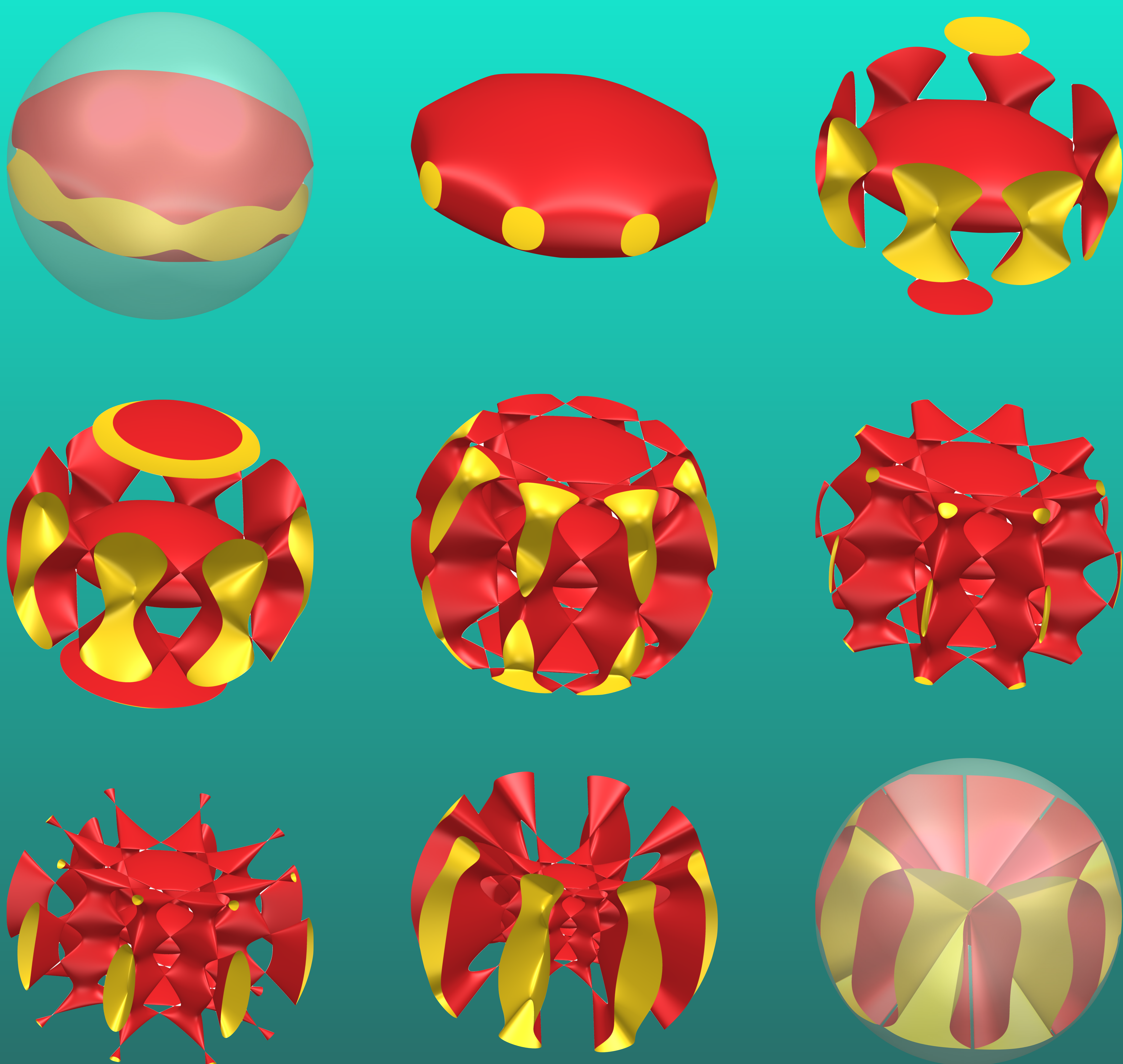
IMAGINARY
open mathematics
imaginary.org

ROMA TRE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI

Dipartimento
Matematica e Fisica
Università Roma Tre

Surf on Surfaces
Le Superfici Algebriche

A PROJECT BY IMAGINARY.ORG



$$1/2 \cdot (-1/4 \cdot (1-\sqrt{2}) \cdot (x^2+y^2)^2 + (x^2+y^2) \cdot (\,(1-1/\sqrt{2}) \cdot z^2 + 1/8 \cdot (2-7\cdot\sqrt{2}) - z^4 + (0.5+\sqrt{2}) \cdot z^2 - 1/16 \cdot (1-12\cdot\sqrt{2})\,)^2$$
$$-(\cos(0\pi/4)\,x+\sin(0\pi/4)\,y-1)\cdot(\cos(1\pi/4)\,x+\sin(1\pi/4)\,y-1)\cdot(\cos(2\pi/4)\,x+\sin(2\pi/4)\,y-1)\cdot(\cos(3\pi/4)\,x+\sin(3\pi/4)\,y-1)$$
$$\cdot(\cos(4\pi/4)\,x+\sin(4\pi/4)\,y-1)\cdot(\cos(5\pi/4)\,x+\sin(5\pi/4)\,y-1)\cdot(\cos(6\pi/4)\,x+\sin(6\pi/4)\,y-1)\cdot(\cos(7\pi/4)\,x+\sin(7\pi/4)\,y-1)=0$$

Superfici di S. Endrass; poster design L. Teresi

QUESTIONE DI PUNTI DI VISTA

Vedete 9 immagini della stessa superficie algebrica di grado 8. La prima immagine è lo zoom vicino allo zero; le altre immagini mostrano cosa si vede man mano che ci si allontana (la prima e l'ultima immagine mostrano anche la sfera che racchiude la superficie). Questa superficie fu scoperta da S. Endrass e pubblicata nel 1995 nella sua tesi all'Università di Erlangen, in Germania. La sequenza mostra quanti dettagli possono esserci in una superficie, e come tali dettagli emergano al variare del punto di vista.

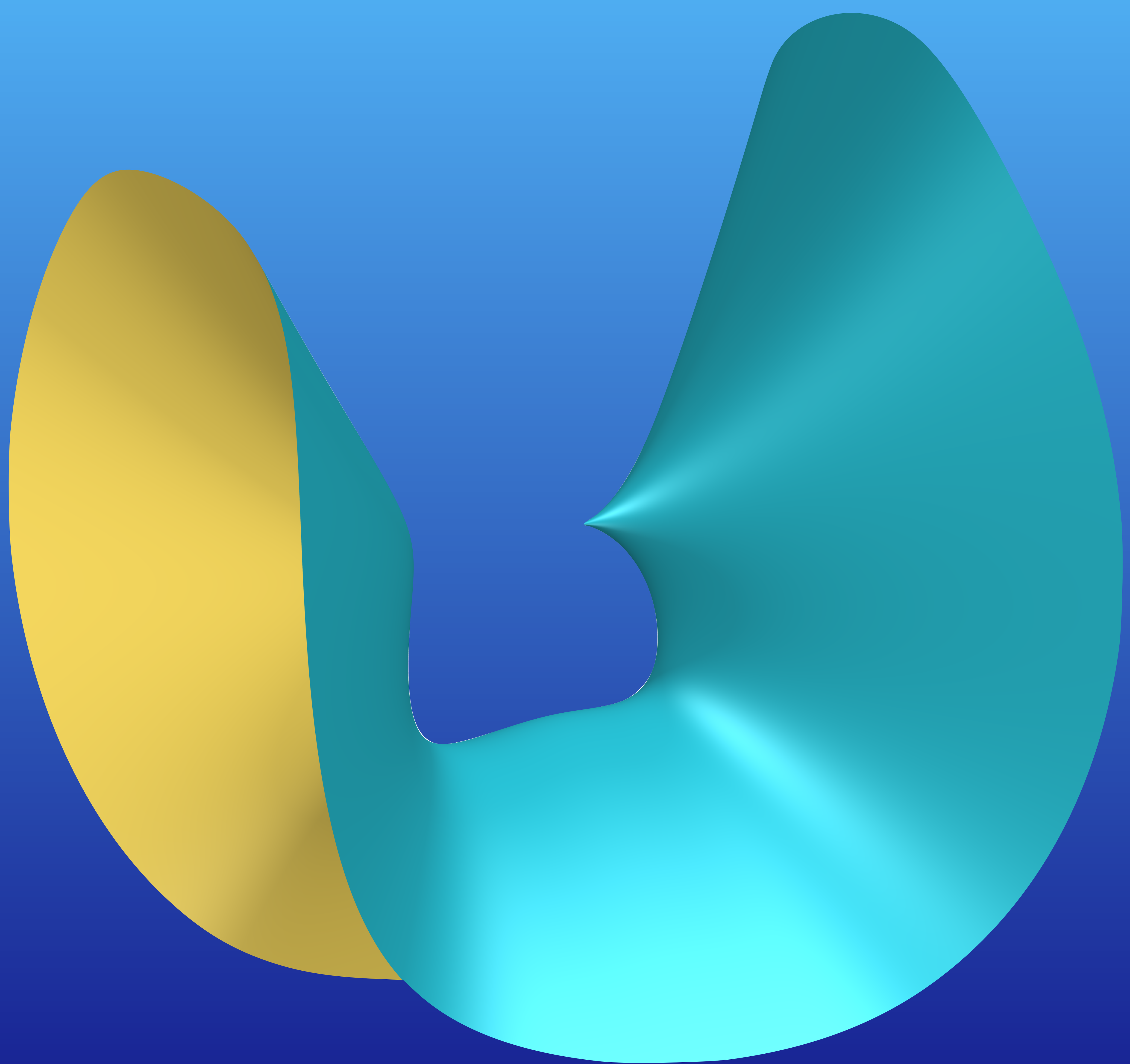
IMAGINARY
open mathematics
imaginary.org

ROMA TRE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI

Dipartimento
Matematica e Fisica
Università Roma Tre

SURF ON SURFACES
Le Superfici Algebriche

A PROJECT BY IMAGINARY.ORG



$$x^2 - x^3 + y^2 + y^4 + z^3 - z^4 = 0$$

Superficie di H. Hauser, S. Gann; poster design L. Teresi

PUNTI LISCI O AGUZZI

Nelle superfici algebriche alcuni punti possono essere "aguzzi". In questa figura ci sembra di vedere due facce che si guardano: una è liscia, l'altra è aguzza. Quando la superficie nell'intorno di un punto non è liscia, quel punto viene chiamato "punto singolare" o "singolarità". Trovare e studiare le singolarità di un oggetto è fondamentale in matematica e in fisica. I buchi neri, per esempio, sono singolarità dello spazio-tempo.

IMAGINARY
open mathematics
imaginary.org

ROMA TRE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI

Dipartimento
Matematica e Fisica
Università Roma Tre

Surf on Surfaces
Le Superfici Algebriche

A PROJECT BY IMAGINARY.ORG

$$x^2 + y^2 + z^3 - z^2 = 0$$

Superficie di H. Hauser, S. Gann; poster design L. Teresi

NODI SUL FAZZOLETTO

La superficie algebrica raffigurata qui sopra presenta un solo punto singolare: riesci a trovarlo? Questo tipo di singolarità si chiama "nodo" perché ha la forma caratteristica del punto in cui un fazzoletto viene stretto con un nodo per formare, ad esempio, un fagotto.

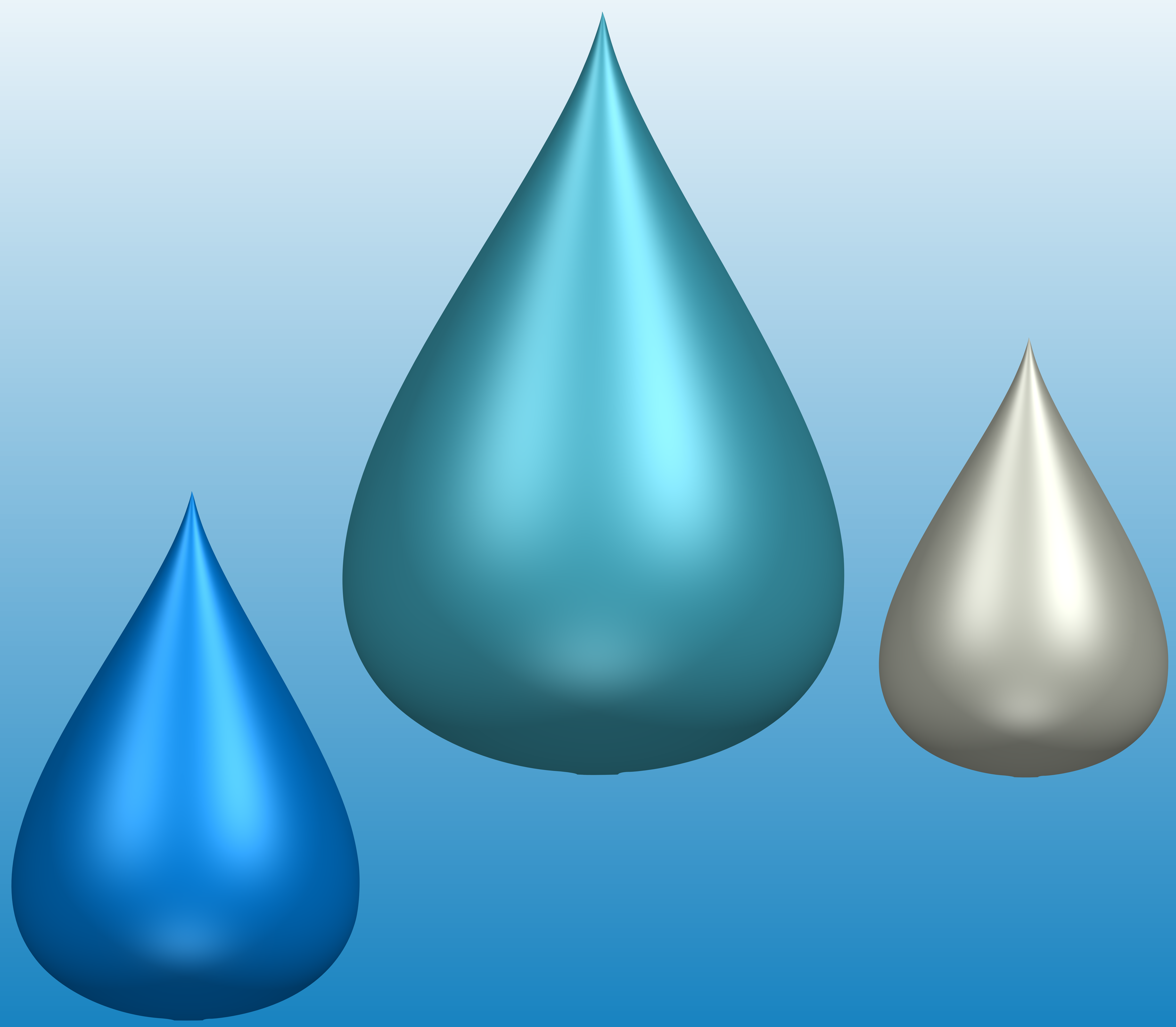
IMAGINARY
open mathematics
imaginary.org

ROMA TRE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI

Dipartimento
Matematica e Fisica
Università Roma Tre

SURF ON SURFACES
Le Superfici Algebriche

A PROJECT BY IMAGINARY.ORG



$$x^2 + y^2 - z^3 \cdot (1 - z) = 0$$

Superficie demo di SURFER; poster design L. Teresi

COME TRE GOCCE D'ACQUA

Le superfici algebriche raffigurate qui sopra sembrano delle gocce. Ogni goccia ha un solo punto singolare: riesci a trovarlo? Questo tipo di singolarità si chiama "cuspide", ed è un tipo di singolarità diverso rispetto a quello della figura precedente, che era un "nodo". Riesci a descrivere le differenze tra i due tipi di singolarità?

IMAGINARY
open mathematics
imaginary.org

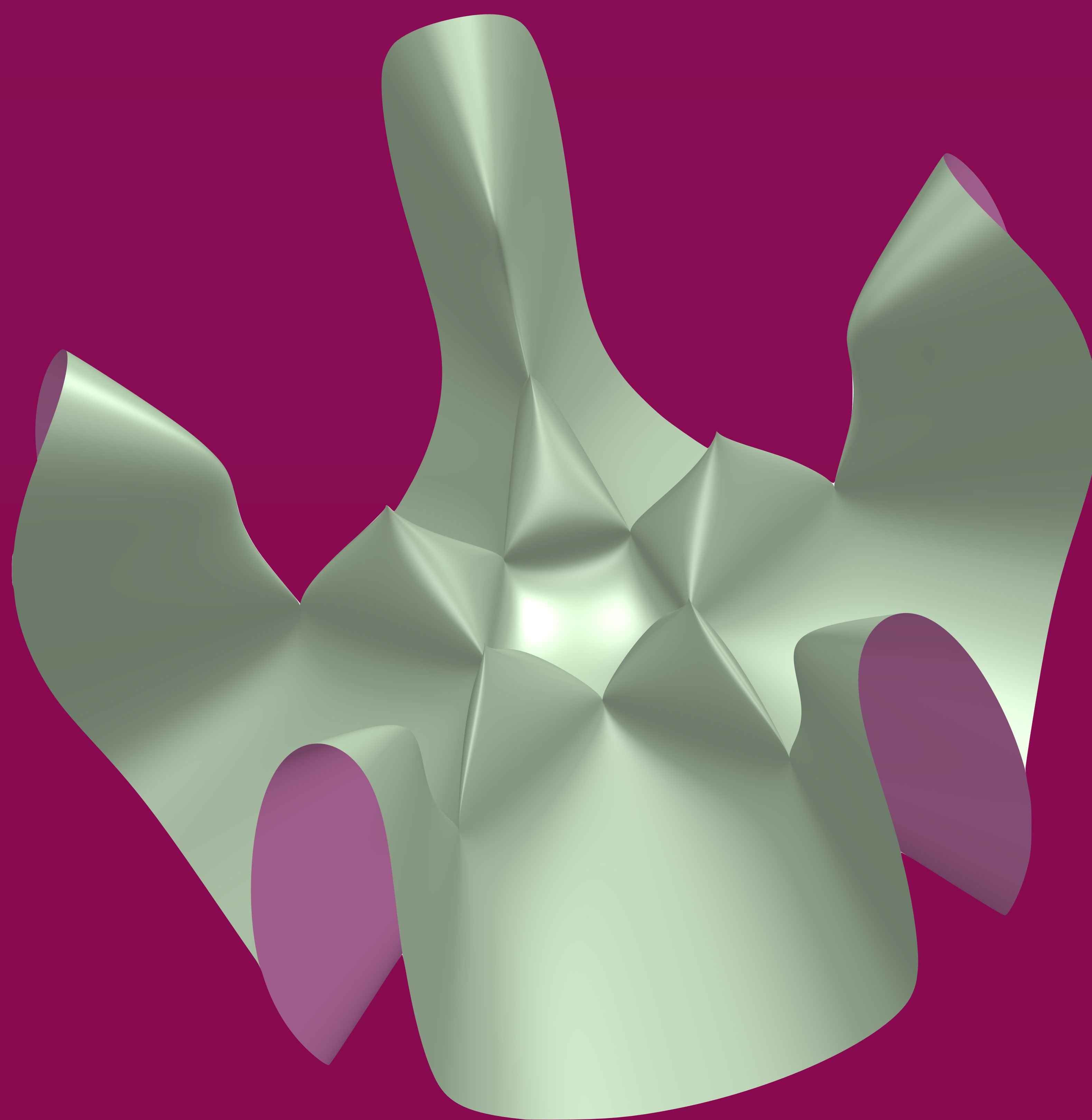
ROMA TRE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI

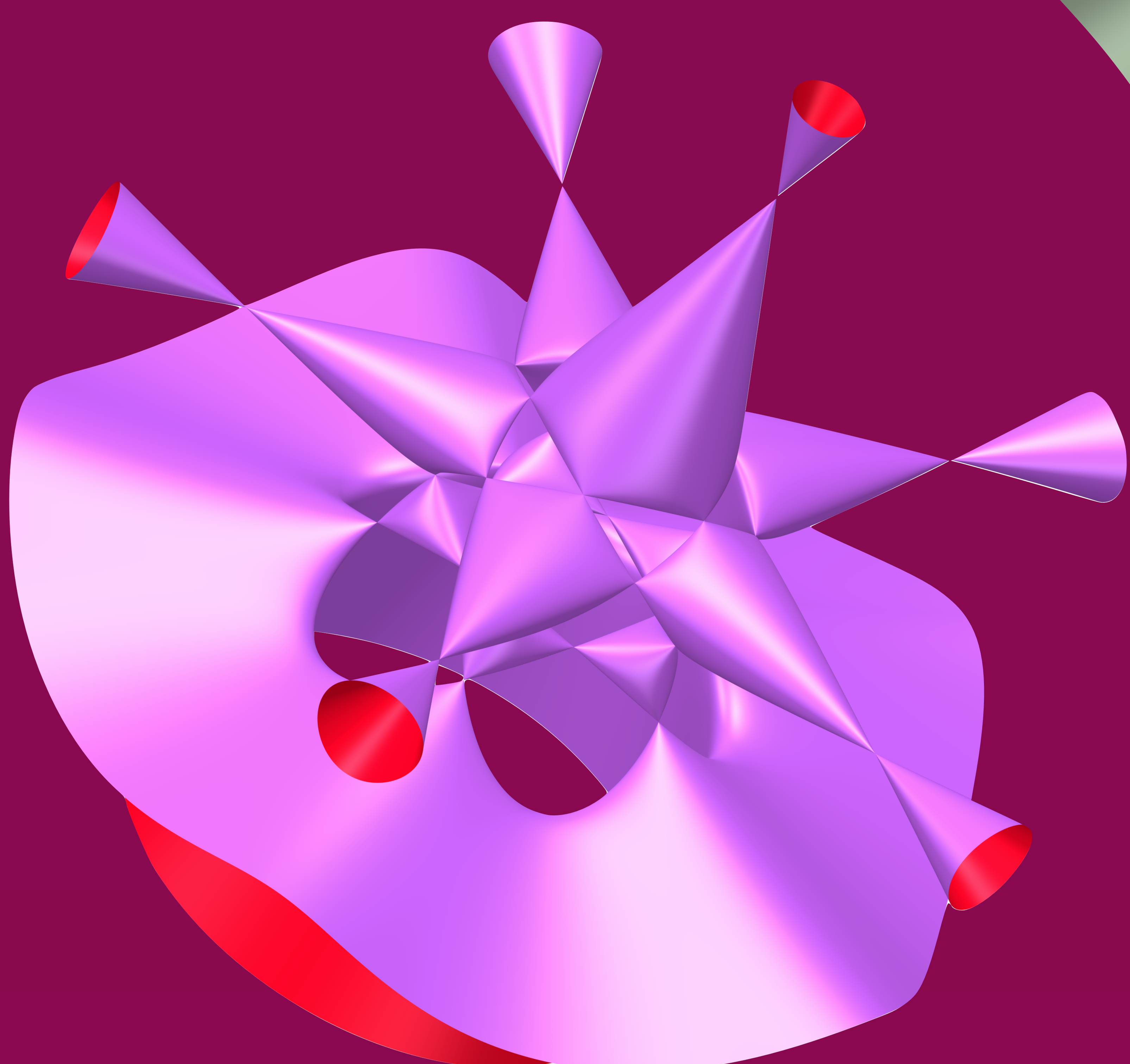
Dipartimento
Matematica e Fisica
Università Roma Tre

SURF ON SURFACES
Le Superfici Algebriche

A PROJECT BY IMAGINARY.ORG

$$x^5 - 10 \cdot x^3 \cdot y^2 + 5 \cdot x \cdot y^4 - 3 \cdot z^5 - 5 \cdot x^4 - 10 \cdot x^2 \cdot y^2 - 5 \cdot y^4 + 10 \cdot z^3 + 20 \cdot x^2 + 20 \cdot y^2 - 15 \cdot z - 24 = 0$$





$$(1 - \sqrt{(5-\sqrt{5})/2 \cdot z}) \cdot (x^2 + y^2 - 1 + (1 + 3\sqrt{5})/4 \cdot z^2)^2 - 3.849606112048292311398384376 6 \cdot (x - z) \cdot$$
$$(\cos(2\pi/5)\, x - \sin(2\pi/5)\, y - z) \cdot (\cos(4\pi/5)\, x - \sin(4\pi/5)\, y - z) \cdot (\cos(6\pi/5)\, x - \sin(6\pi/5)\, y - z) \cdot (\cos(8\pi/5)\, x - \sin(8\pi/5)\, y - z) = 0$$

Superfici di E.G. Togliatti (sotto) e O. Labs (sopra); poster design L. Teresi

TIPI SINGOLARI

Entrambe le superfici contengono molti punti singolari; una delle due contiene solo cuspidi, un'altra solo nodi... sai dire quale?

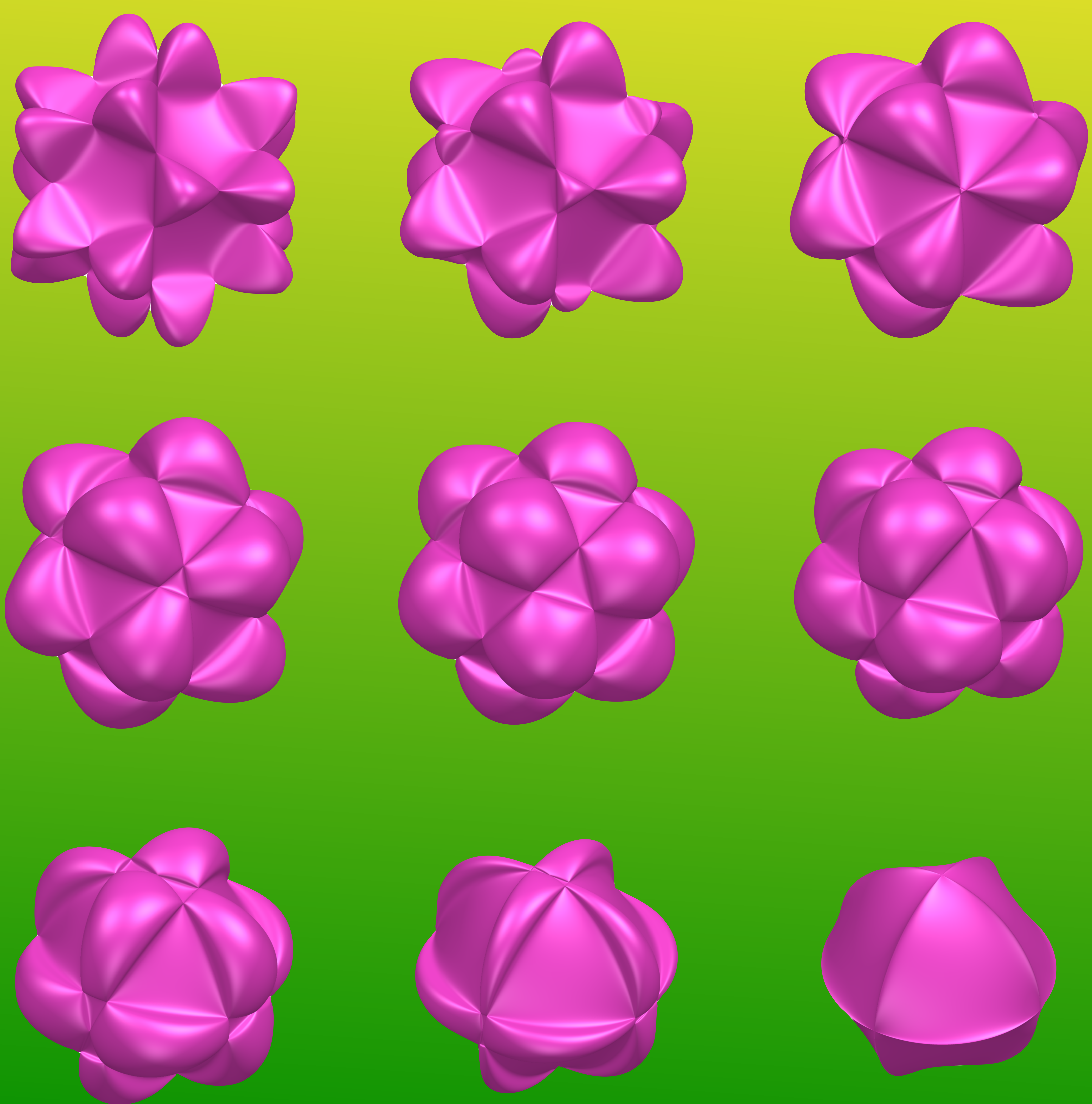
IMAGINARY
open mathematics
imaginary.org

ROMA TRE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI

Dipartimento
Matematica e Fisica
Università Roma Tre

SURF ON SURFACES
Le Superfici Algebriche

A PROJECT BY IMAGINARY.ORG



$$4 \cdot ((a \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 \cdot x^2 - y^2) \cdot ((a \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 \cdot y^2 - z^2) \cdot ((a \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 \cdot z^2 - x^2) - (1 + 2 \cdot (a \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}) \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - 1)^3 = 0$$

Superfici di W. Barth; poster design L. Teresi

DEFORMAZIONI

Vedete 9 superfici ottenute dalla stessa equazione al variare del parametro “a”, a partire da “a=1” nella prima immagine, e diminuendolo fino ad “a=0” nell’ultima immagine. Questa superficie fu scoperta da W. Barth nel 1996 studiando le cuspidi. La differenza tra le varie superfici si vede sopratutto se vi concentrate sui punti singolari: le pieghe e le cuspidi si spostano con grande rapidità. Questa instabilità dei punti singolari è un fatto generale collegato, per esempio, all'imprevedibilità del comportamento dei buchi neri.

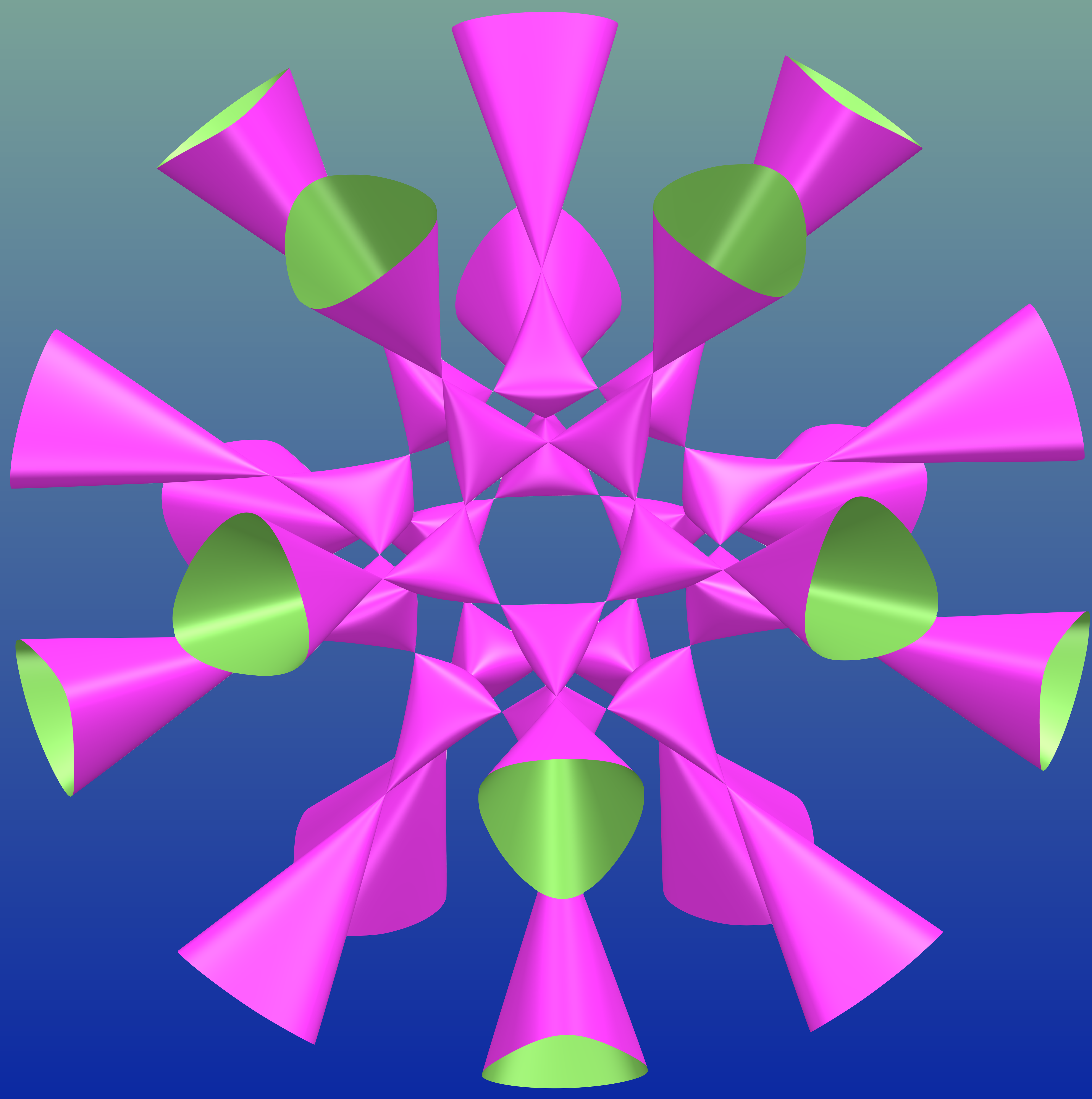
IMAGINARY
open mathematics
imaginary.org

ROMA TRE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI

Dipartimento
Matematica e Fisica
Università Roma Tre

Surf on Surfaces
Le Superfici Algebriche

A PROJECT BY IMAGINARY.ORG



$$4 \cdot ((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 \cdot x^2 - y^2) \cdot ((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 \cdot y^2 - z^2) \cdot ((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 \cdot z^2 - x^2) - (1 + 2 \cdot (\frac{1+\sqrt{5}}{2}) \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - 1)^3 = 0$$

Superficie di W. Barth; poster design L. Teresi

LA SESTICA DI BARTH

Il numero di punti singolari di una superficie algebrica può essere molto alto, ma è sempre limitato da una costante che dipende dal grado della superficie. Le superfici che, fissato il grado, hanno il massimo numero possibile di singolarità sono tanto interessanti quanto difficili da trovare. Qui vedete la superficie record di grado 6: ha 65 singolarità di tipo nodale; la sua equazione è quasi uguale a quella della precedente superficie. Riuscite a vedere le simmetrie di questa figura? Sono le stesse di un icosaedro!.

IMAGINARY
open mathematics
imaginary.org

ROMA TRE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI

Dipartimento
Matematica e Fisica
Università Roma Tre

Surf on Surfaces
Le Superfici Algebriche

A PROJECT BY IMAGINARY.ORG

Superficie di O. Labs; poster design L. Teresi

LA SETTICA DI LABS: RECORD DEL MONDO

Le superfici record sono note solo fino al grado 6. Per i gradi successivi il problema è ancora aperto. Per esempio, questa superficie scoperta a Mainz nel 1997 ha il maggior numero di singolarità note per una superficie di grado 7, ma nessuno sa se esista una settica con un numero maggiore di singolarità. Non mostriamo la sua equazione perché riempirebbe tutto il poster!

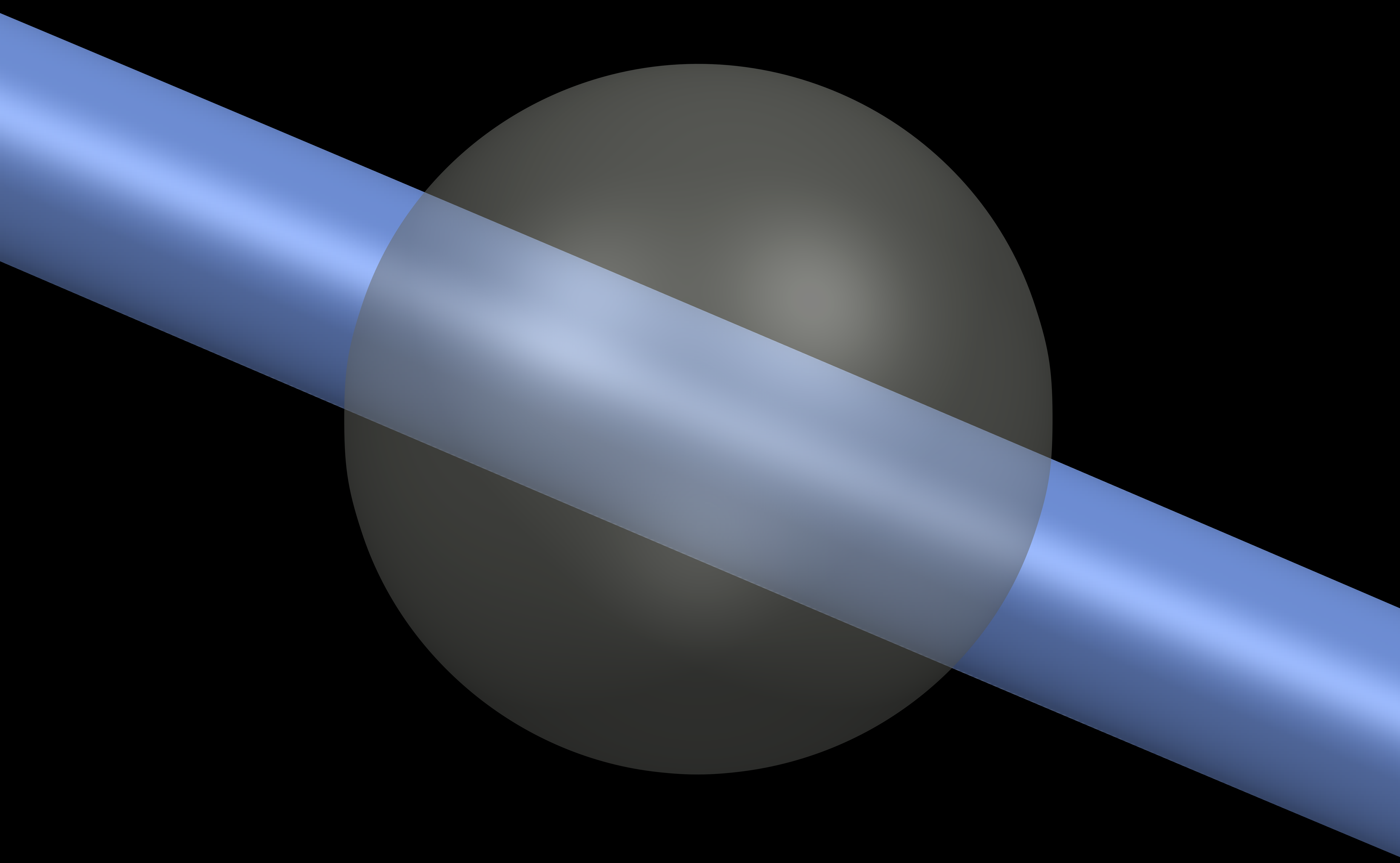
IMAGINARY
open mathematics
imaginary.org

ROMA TRE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI

Dipartimento
Matematica e Fisica
Università Roma Tre

Surf on Surfaces
Le Superfici Algebriche

A PROJECT BY IMAGINARY.ORG



Poster design L. Teresi

COSA VEDIAMO?

Per rappresentare una superficie utilizziamo il riferimento cartesiano: ogni punto dello spazio è individuato da tre coordinate: x,y,z. Una superficie algebrica è formata dai punti che soddisfano un'equazione algebrica $f(x,y,z)=0$, e può essere limitata, come la sfera ($x^2+y^2+z^2-r^2=0$), oppure illimitata come il cilindro ($x^2+y^2-r^2=0$). Le immagini mostrano sempre la porzione di superficie contenuta in una sfera: cambiando il raggio di questa sfera possiamo vedere dettagli minuti, oppure guardare la superficie da lontano.

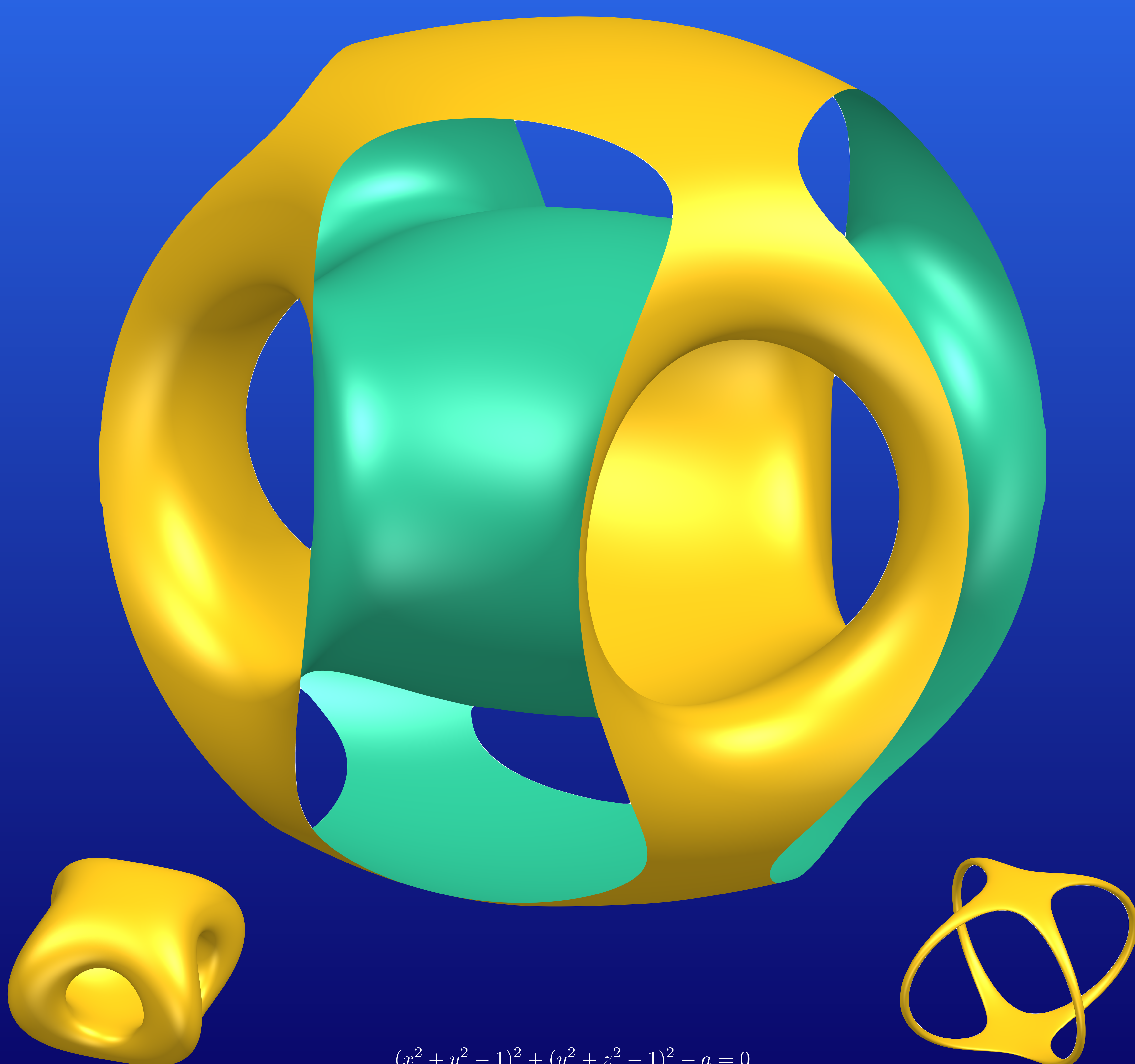
IMAGINARY
open mathematics
imaginary.org

ROMA TRE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI

Dipartimento
Matematica e Fisica
Università Roma Tre

SURF ON SURFACES
Le Superfici Algebriche

A PROJECT BY IMAGINARY.ORG



$$(x^2 + y^2 - 1)^2 + (y^2 + z^2 - 1)^2 - a = 0$$

Superficie demo di SURFER; poster design L. Teresi

TRUCCHI DA ESPERTI

Queste superfici sono ottenute così: 1) Prendi due cilindri ortogonali tra loro, di raggio pari ad 1: x^2+y^2-1=0 e y^2+z^2-1=0; 2) Eleva i cilindri al quadrato e sommali; 3) Sottrai il numero “a”. In questo modo i due cilindri si incurvano, la loro intersezione acquista spessore e diventa arrotondata. L’immagine grande corrisponde ad a=0.7 e mostra la zona intorno all’intersezione; se guardassimo da lontano vedremmo delle superfici chiuse come quelle in basso: sinistra a=0.5, destra a=0.02.

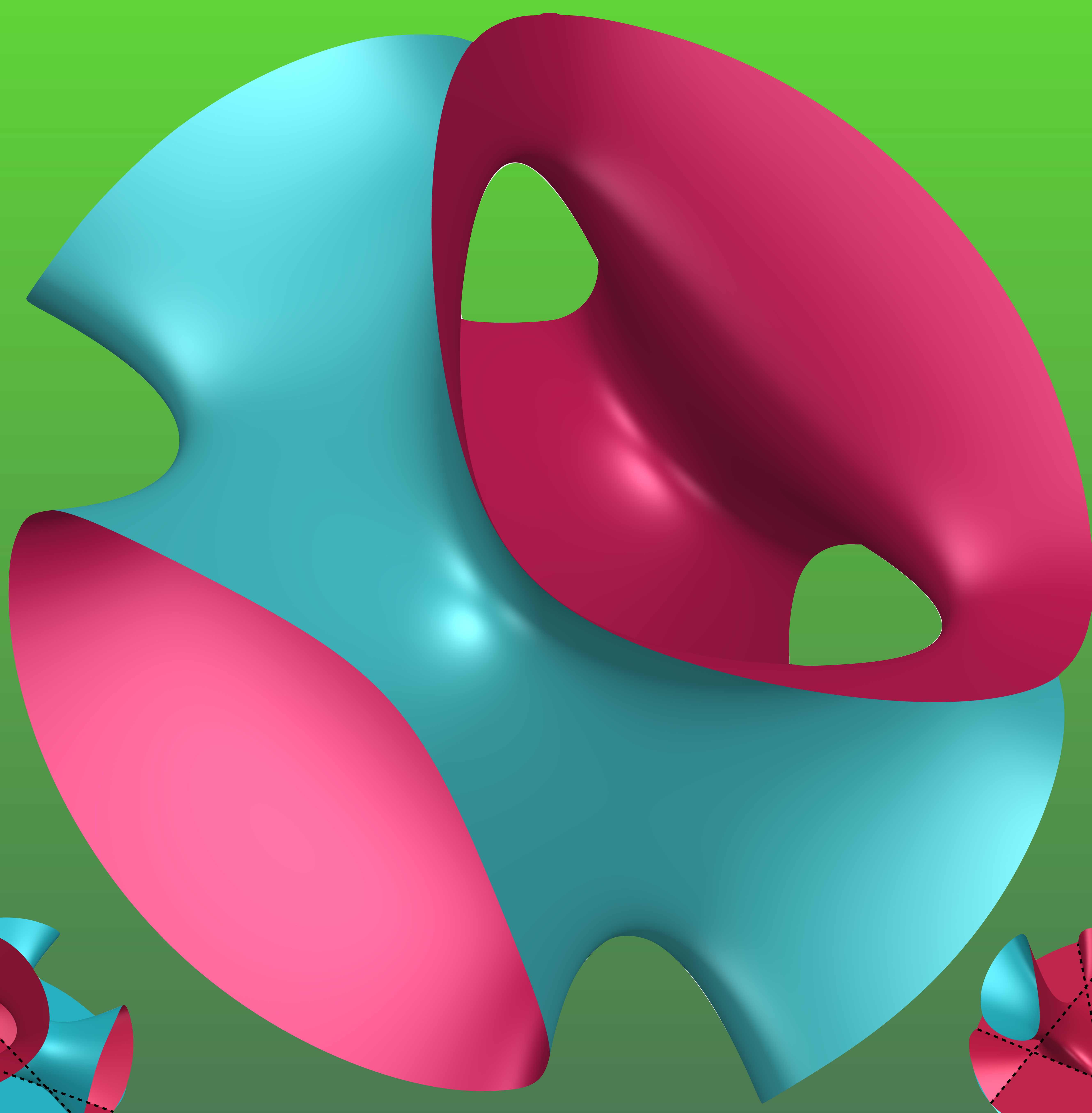
IMAGINARY
open mathematics
imaginary.org

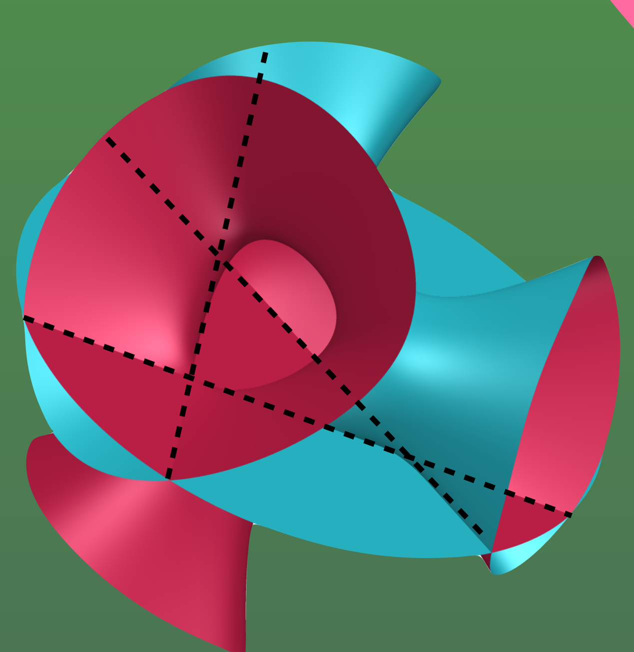
ROMA TRE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI

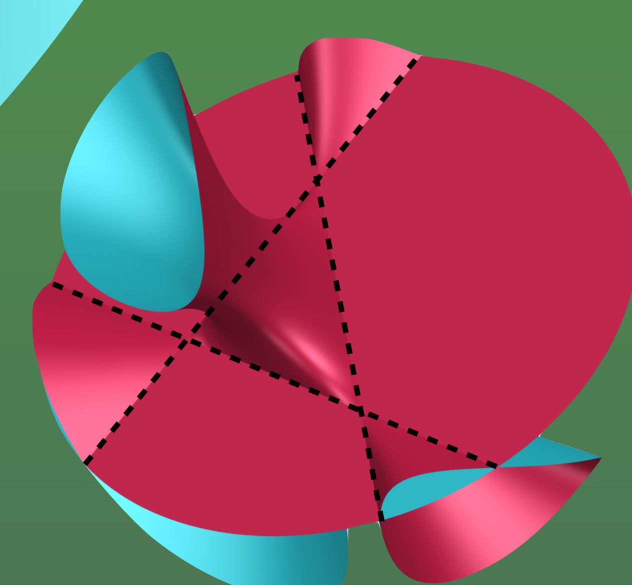
Dipartimento
Matematica e Fisica
Università Roma Tre

SURF ON SURFACES
Le Superfici Algebriche

A PROJECT BY IMAGINARY.ORG







$$x^3 + y^3 + z^3 + 0.4^3 - (x + y + z + 0.4)^3 = 0$$

Superficie di F. Klein; poster design L. Teresi

LA CUBICA DI KLEIN

Questa superficie è nota con il nome di "cubica icosaedrica di Klein". La sua particolarità è che contiene 27 rette. Le immagini in basso mostrano alcune di queste rette, ottenute tagliando la superficie di Klein con un piano. Capire se una superficie algebrica contiene delle rette e quante ne contiene è un problema ricorrente della geometria, ed è motivato da alcune questioni che vengono dalla fisica matematica.

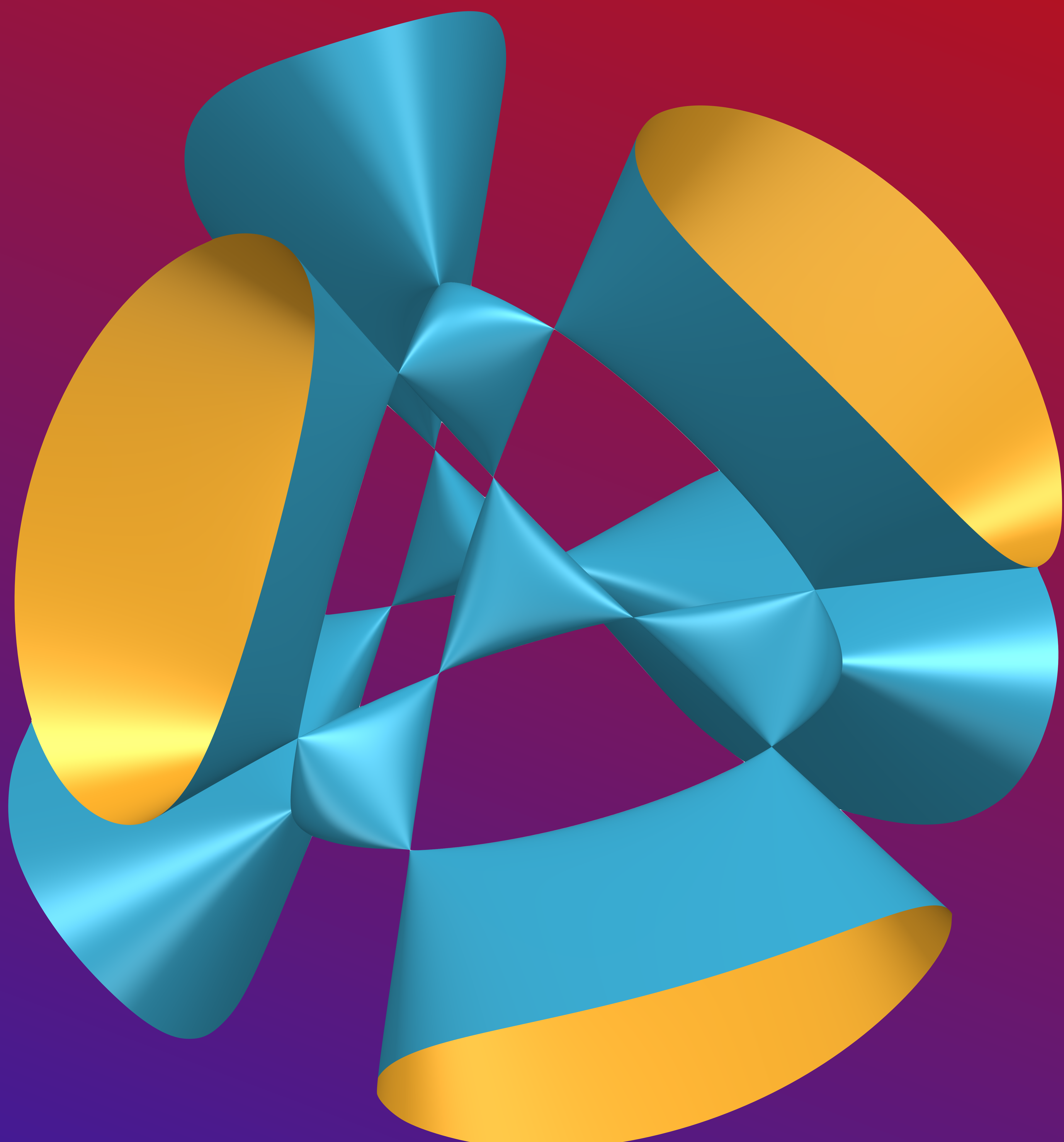
IMAGINARY
open mathematics
imaginary.org

ROMA TRE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI

Dipartimento
Matematica e Fisica
Università Roma Tre

Surf on Surfaces
Le Superfici Algebriche

A PROJECT BY IMAGINARY.ORG



$$\left(x^2+y^2+z^2-(0.5+2\cdot a)^2\right)^2-3\cdot\frac{(0.5+2\cdot a)^2-1}{3-(0.5+2\cdot a)^2}\cdot(1-z-\sqrt{2}\cdot x)\cdot(1-z+\sqrt{2}\cdot x)\cdot(1+z+\sqrt{2}\cdot y)\cdot(1+z-\sqrt{2}\cdot y)=0$$

Superficie di E. Kummer; poster design L. Teresi

UNA FAMIGLIA DI SUPERFICI DA RECORD: LE KUMMER

Eduard Kummer fu il primo nel 1875 a chiedersi quale fosse il massimo numero possibile di singolarità per una superficie di grado fissato. Egli scoprì questa superficie, che con 16 singolarità è il record assoluto per il grado 4, ma non solo: scoprì anche numerose deformazioni di questa superficie, ottenute cambiando di poco i coefficienti, ciascuna delle quali contiene 16 punti singolari. Insomma: una famiglia da record!

IMAGINARY
open mathematics
imaginary.org

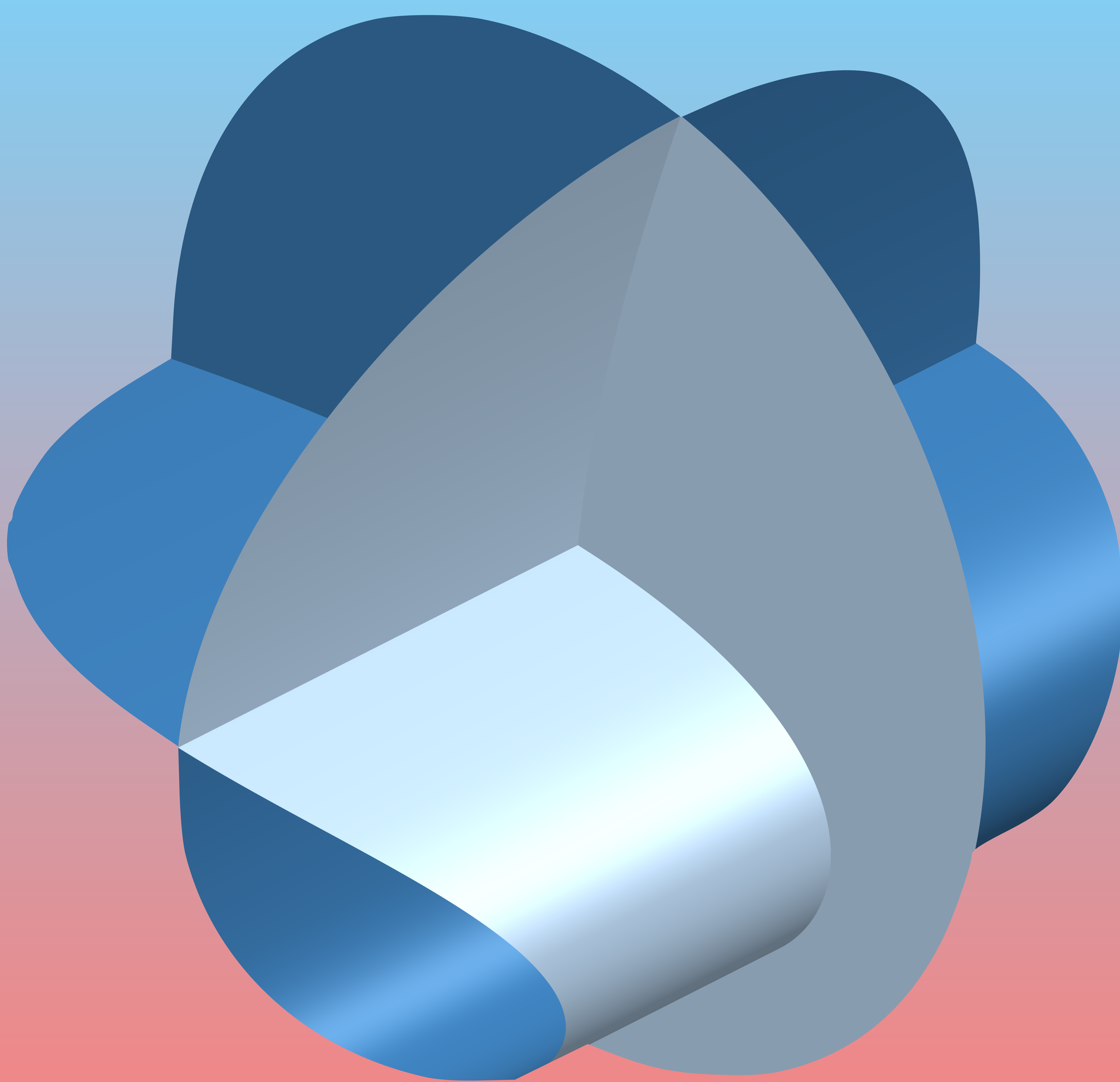
ROMA TRE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI

Dipartimento
Matematica e Fisica
Università Roma Tre

Surf on Surfaces

Le Superfici Algebriche

A PROJECT BY IMAGINARY.ORG



$z \cdot (x^2 - y^2 \cdot (y+1)) = 0$

Superficie di F. Anella, R. Carbone; poster design L. Teresi

SUPERFICI COMPOSTE

Una superficie algebrica si dice riducibile se può essere vista come unione di due superfici algebriche. Ad esempio, la figura che vedete è l'unione di due componenti: un piano e un cilindro con sezione nodale. Queste due superfici non possono essere ulteriormente scomposte: si dice che la figura ha esattamente due componenti irriducibili.

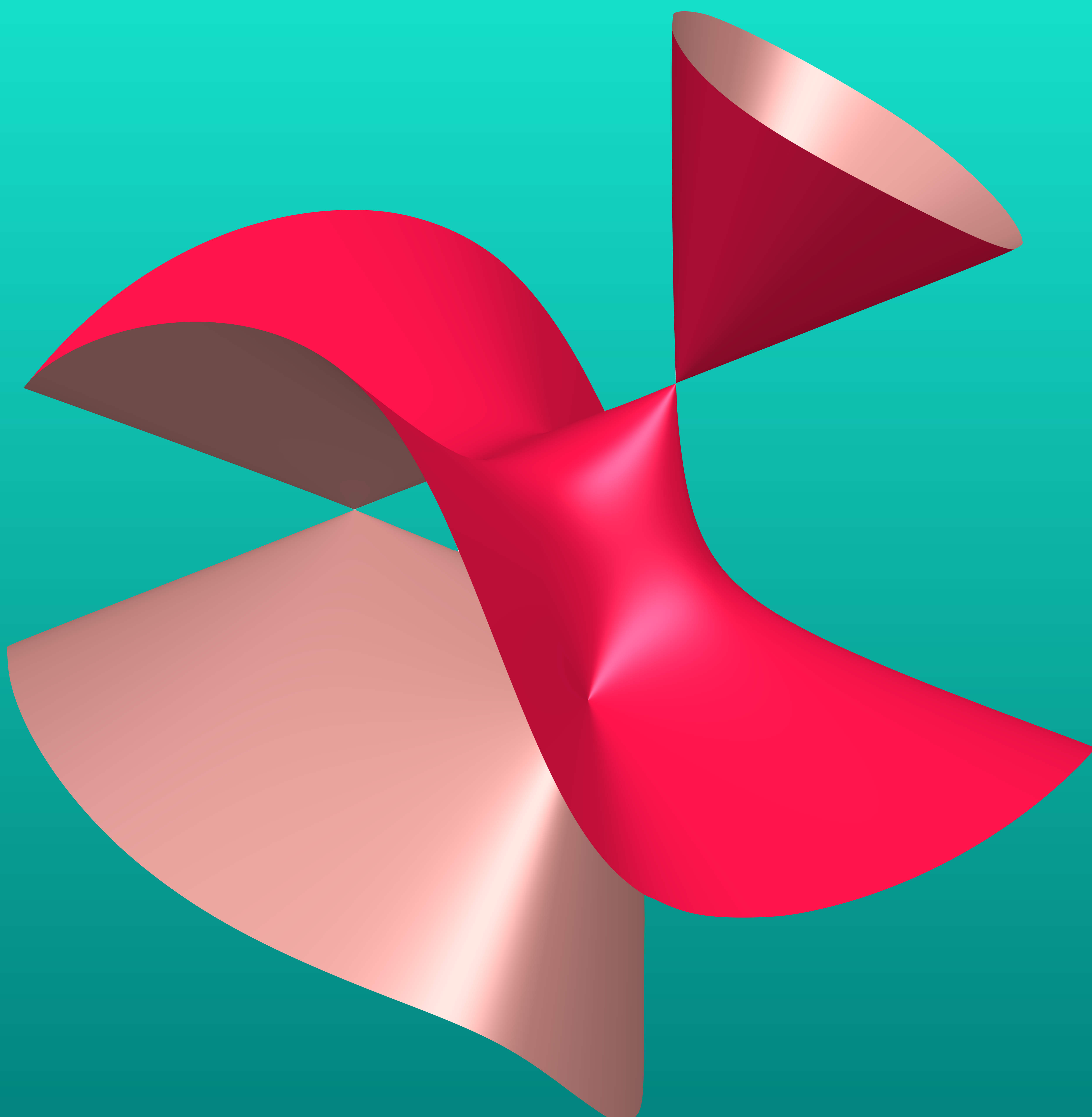
IMAGINARY
open mathematics
imaginary.org

ROMA TRE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI

Dipartimento
Matematica e Fisica
Università Roma Tre

SURF ON SURFACES
Le Superfici Algebriche

A PROJECT BY IMAGINARY.ORG



$$(b-0.5)\cdot(x+y+z-1)^2+(a-0.5)\cdot(x+y+z+3)^2+x^3+y^3+z^3+1-0.25\cdot(x+y+z+1)^3=0$$

Superficie di L. Schaefli; poster design L. Teresi

LA CUBICA DI CAYLEY

Questa superficie di grado 3, detta cubica, ha quattro punti singolari a forma di cono. Nell'immagine qui sopra se ne vedono solo tre: riesci a trovarli? Le ricerche sulle superfici cubiche risalgono al XIX secolo; fu L. Schlafli che nel 1863 classificò queste superfici e dimostrò che le cubiche posso avere al massimo quattro punti singolari. La superficie di Cayley fu il punto di partenza per gli studi di F. Klein sulle superfici algebriche reali.

IMAGINARY
open mathematics
imaginary.org

ROMA TRE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI

Dipartimento
Matematica e Fisica
Università Roma Tre