Eberhard-Karls-Universität Tübingen
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Wissenschaftliche Arbeit
zur 1. Staatsprüfung
für das Lehramt am Gymnasium

Spielerisch Lernen im Mathematikunterricht: Das Lernspiel Ganita und seine fachdidaktischen Grundlagen

Verfasserin	Anja Fetzer Rümelinstraße 8 72070 Tübingen
Betreuerin	Prof. Dr. Carla Cederbaum

Abgabetermin	30.8.2019

„all forms of play are learning and all forms of learning are play"

(Wong et al., 2007, S.2f)

Inhalt

1. Einleitung

Im Bildungsplan für das Gymnasium in Baden-Württemberg (2016) werden unter anderem folgende Anforderungen an einen gelungenen Mathematikunterricht gestellt:

> „Guter Mathematikunterricht bedarf kognitiv aktivierender, reichhaltiger, möglichst authentischer und motivierender inner- und außermathematischer Problemsituationen, die das Potenzial beinhalten, Begriffe, Regeln, Lösungsverfahren oder Modellierungen entweder selbstständig zu entdecken oder begründet zu konstruieren. Dabei spielen die eigenständige Bearbeitung von Frage- und Problemstellungen, die Reaktivierung des Vorwissens, die Auseinandersetzung mit unterschiedlichen Zugangs- und Lösungsmöglichkeiten, ein konstruktiver Umgang mit Fehlern und die Möglichkeit zur Kooperation zwischen den Lernenden eine wichtige Rolle." (Ministeriums für Kultus, 2016, S.9)

Es werden die Aktivierung der Schüler[1], die Konfrontation mit authentischen, auch außerschulischen, Problemen, das selbstständige Entdecken und Konstruieren, das Vorstellen mehrerer Zugänge und Lösungen und die Kooperation betont. Weiterhin wird hervorgehoben, dass die Schüler die Bedeutung der Mathematik in der Welt erkennen sollen und lernen sollen, Mathematik anzuwenden (Ministeriums für Kultus, 2016, S.3) sowie prozessbezogene und inhaltsbezogene Kompetenzen erwerben sollen (Ministeriums für Kultus, 2016, S.6f).

In dieser Arbeit wird anhand des Lernspiels Ganita aufgezeigt, warum es sinnvoll ist, diesen Forderungen mit einem Spiel zu begegnen.

Dem Spiel wird in der Psychologie eine große Bedeutung bei der Entwicklung des Kindes beigemessen. Es wird als eine „Grundform der Auseinandersetzung des Kindes mit seiner Umwelt" (Retter, 2003, S.40) betrachtet. Piaget bestimmte verschiedene Spielstadien, die parallel zu den Entwicklungsstadien von Kindern verlaufen. Dabei unterschied er zwischen sogenannten Übungsspielen, die die sensomotorische Intelligenz trainieren, Symbolspielen, in denen Zeichen zur Repräsentation verwendet werden und Regelspielen, in denen die Ordnung der spielerischen Konstruktionen, die genaue Imitation der Wirklichkeit und die Differenzierung und Präzisierung von Rollen wichtig sind. Voraussetzungen für die letzte Art von Spielen sind soziale Kommunikation, Distanz und Leistungsmotivation. Zudem können durch Regelspiele moralische Konzepte wie Gerechtigkeit, Gruppensolidarität und Gruppenverantwortung gelernt werden (Retter, 2003, S.39-46).

---

[1] In dieser Arbeit wird für den besseren Lesefluss das generische Maskulinum verwendet. Weibliche und anderweitige Geschlechteridentitäten werden dabei ausdrücklich miteingeschlossen.

Im Sinne Piagets nutzen Kinder Spiele, um zu lernen. Spielen und Lernen scheinen also keine gegensätzlichen Konzepte zu sein, sondern haben Gemeinsamkeiten, die für einen effektiven und erfolgreichen Lernprozess genutzt werden können. Spielen und Lernen sind beides interaktive Prozesse, die den Spieler bzw. Lerner herausfordern. Sie haben Regeln, um das Spiel zu gewinnen bzw. um Wissen und Fähigkeiten zu erwerben. Zudem sind die Kriterien für intrinsische Motivation in beiden Prozessen sehr ähnlich. Nun sind sowohl der Spiel- als auch der Lernprozess häufig komplex und schwierig. Es ist aber das Spiel, an dem Individuen trotzdem Spaß haben, über eine lange Zeitspanne hinweg motiviert bleiben und sich Herausforderungen stellen, während Lernen oft als unangenehm empfunden und von Individuen gemieden wird. Diese Zusammenhänge und die Vorteile des Spiels können nun für einen erfolgreichen Lernprozess, der Freude bringt, genutzt werden (Breuer & Bente, 2010, S.12f).

Speziell in Bezug auf die Mathematik kann eine enge Wechselbeziehung zwischen Spielen und Mathematik Betreiben beobachtet werden. Mathematik hat einen spielerischen Charakter, denn sowohl der mathematische Prozess als auch der Spielprozess sind ungezwungen und fantasievoll, können Spaß und Stolz bereiten und zeugen von einer gewissen Faszination. Das Aufstellen und Einhalten von Regeln und die Entwicklung von Strategien spielen in beiden Prozessen eine wichtige Rolle. Mathematik kann somit als reines Gedankenspiel aufgefasst werden. Als Beispiel zur Untermauerung des Zusammenhangs nennt Käpnick die Wahrscheinlichkeitsrechnung, die mit der Untersuchung von Glücksspielen begann (Käpnick, 2014, S.176ff).

Spiele können also eine Bereicherung für den Mathematikunterricht darstellen: „games are a valuable addition to our repertoire of methods for teaching mathematics“ (Ernest, 1986, S.2).

In den folgenden Kapiteln wird erläutert, warum das Spiel Ganita den Anforderungen eines gelungenen Mathematikunterrichts gerecht wird und eine Bereicherung für den traditionellen Unterricht darstellt. Dabei liegt der Fokus auf der Motivation und den mathematikbezogenen Überzeugungen der Schüler.

In Kapitel 2 wird zunächst auf die Grundlagen von Ganita eingegangen, damit in den folgenden Kapiteln klar ist, auf was Bezug genommen wird. Die grundlegenden Spielmechanismen sowie die Kategorien, in die die Aufgabenkarten eingeteilt sind, werden erklärt. Leser, die das Spiel schon kennen, können dieses Kapitel überspringen.

Da es mehrere Bezeichnungen für Spiele gibt, die primär auf den Lernprozess ausgerichtet sind, werden diese in Kapitel 3 gegeneinander abgegrenzt. Auf Grundlage dessen wird entschieden, welche Bezeichnung passend für Ganita ist. Weiterhin werden verschiedene Studien sowie theoretische Literatur zu Lernspielen, Serious Games und im Speziellen Brettspielen zusammengefasst, die verschiedene Spiele auf ihre Effektivität hin untersuchen oder allgemein Kriterien für die Effektivität von Spielen für den Lernprozess angeben. Schließlich wird Ganita anhand dieser Kriterien analysiert, um Schlüsse auf den Einfluss des Spiels auf den Lernprozess der Spieler ziehen zu können.

Da Motivation über die gesamte Literatur hinweg als wichtiges Argument für den Einsatz von Spielen im Unterricht genannt wird und der Grund ist, warum Individuen auch bei schwierigen Spielen nicht aufgeben während sie die Herausforderungen eines schwierigen Lernprozesses meiden, widmet sich das Kapitel 4 dem Konzept der Motivation. Zunächst werden die theoretischen Grundlagen vor einem psychologischen Hintergrund erläutert. Anschließend wird der Zusammenhang zwischen Motivation und Lernen herausgestellt. Am Ende des Kapitels wird anhand der vorherigen Erläuterungen auf die Motivation in Ganita eingegangen, wobei der Fokus auf der Frage liegt, ob Ganita eine Motivation fördert, die mit positiven Lernergebnissen assoziiert wird.

In Kapitel 5 werden epistemologische Überzeugungen, insbesondere mathematische, sowie weitere mathematikbezogene Überzeugungen betrachtet. Es wird zunächst analysiert, was epistemologische Überzeugungen sind und wie bestimmte Überzeugungen mit dem Lernerfolg indirekt assoziiert werden können. Weiterhin wird darauf eingegangen, wie epistemologische bzw. mathematikbezogene Überzeugungen von Individuen verändert werden können, um schließlich zu argumentieren, warum Ganita den Spielern die Möglichkeit gibt, sich ihrer Überzeugungen bewusst zu werden und sie dazu anregt, ihre Überzeugungen hin zu solchen zu verändern, die für den Lernerfolg ertragreich sind.

In Kapitel 6 werden die Ergebnisse der vorherigen Kapitel zusammengefasst und ein Fazit gezogen. Zudem wird ein Ausblick gegeben, welche Aspekte in Bezug auf Ganita noch analysiert werden können.

Während der Entwicklungsphase wurde Ganita im Zuge mehrerer Unterrichtsbesuche mit Schülern der 5. und 6. Klasse eines Gymnasiums getestet. Das Vorgehen sowie die Beobachtungen und Ergebnisse werden in Kapitel 7 beschrieben.

In Kapitel 8 befindet sich schließlich der Anhang und Informationen zur Verfügbarkeit des Spiels und in Kapitel 9 das Literaturverzeichnis.

2. Das Spiel Ganita

2.1. Grundlagen des Spiels

Das Spiel Ganita richtet sich an Kinder der 5.-7. Klasse, aber es kann auch mit älteren Kindern gespielt werden. Es handelt sich um ein Lernspiel mit mathematischem Inhalt, das für den Mathematikunterricht konzipiert wurde, aber durchaus auch in anderen Kontexten wie z. B. in der Familie oder mit Freunden gespielt werden kann. Das Spiel besteht aus einem Brett, Aufgabenkarten, Spielfiguren, Würfeln, Sanduhr, Spielregeln und einem Lexikon. Die Aufgabenkarten sind nach verschiedenen Kategorien geordnet, die in Kapitel 2.2 erläutert werden. Die Beschreibung der Grundlagen des Spiels orientiert sich an der phänomenologischen Perspektive, wie sie von Tubach vorgeschlagen wird. Sie teilt Spiele nach ihrem mathematischem Inhalt, der Spielgattung, ihrer sozialen Struktur und dem Verhältnis von Spiel und Mathematik ein (Tubach, 2019, S.55-59).

Bezüglich des mathematischen Inhalts enthält Ganita viele verschiedene mathematische Themen. Diese kommen sowohl aus dem Schulkontext als auch aus außerschulischen Bereichen. Die Spielkarten wurden unabhängig von den Kategorien in diese Themenbereiche eingeteilt. Sie sind am rechten oberen Rand der Spielkarte durch einen Zahlencode vermerkt und dienen dazu, dass die Lehrer die Karten ihrer Intention entsprechend zügig sortieren können. Im Folgenden werden die Zahlencodes und die entsprechenden Themenbereiche aufgelistet:

01 Geschichte
02 Personen
03 Geometrie
04 Vorstellungsvermögen
05 Primzahlen
06 Rätselaufgaben und Fangfragen
07 Brüche und Dezimalzahlen
08 Schätzen
09 Textaufgaben
10 Alltagswissen
11 Grundrechenarten und Rechengesetze
12 Messen und Einheiten
13 Weiterführende Aufgaben
14 Wahrscheinlichkeitsrechnung
15 Zahlbereiche $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$
16 Teilbarkeit

Die schulischen Themen orientieren sich am Bildungsplan für das Gymnasium in Baden-Württemberg von 2016 für die 5. und 6. Klasse und decken sowohl die prozessbezogenen

Kompetenzen als auch die Leitideen „Zahl – Variable – Operation", „Messen", „Raum und Form", „Funktionaler Zusammenhang", „Daten und Zufall" ab.

Im Bereich Geometrie (03) finden sich Aufgaben zu verschiedenen geometrischen Figuren und Körpern (Rechteck, Quadrat, Dreieck, Trapez, Parallelogramm, Kreis, Quader, Würfel, Prisma, Pyramide und Kugel). Die Figuren und Körper müssen von den Schülern erklärt werden können, sowie Unterschiede und Gemeinsamkeiten zwischen ihnen genannt werden. In diesem Zusammenhang tauchen Begriffe wie Umfang, Flächeninhalt und Volumen auf. Detaillierte Aufgaben gibt es zu verschiedenen Dreieckstypen (rechtwinklig, gleichschenklig, gleichseitig) und zum Begriff des Winkels (rechter, spitzer, stumpfer Winkel). Insbesondere gibt es mehrere Aufgaben zur Zahl π. Es gibt Aufgaben zur Unterscheidung von Strecken und Geraden und zu den Begriffen Achsen- und Punktsymmetrie. Das kartesische Koordinatensystem wird ebenfalls auf den Aufgabenkarten und auch im Lexikon behandelt. Zudem wurde versucht, Hilfsmittel wie das Geodreieck miteinzubinden.

Die Spielkarten enthalten mehrere Aufgaben, in denen Primzahlen (05) mit bestimmten Eigenschaften gefunden werden müssen oder in denen der Umgang mit dem Konzept der Primzahl geübt wird. Ebenso müssen die Schüler Zahlen in ihre Primfaktoren zerlegen.

Für den Bereich „Brüche und Dezimalzahlen" (07) gibt es mehrere Aufgaben, die das Verständnis von Brüchen als Anteil oder Verhältnis verbessern sollen. Es gibt auch viele Aufgaben zum Rechnen mit Brüchen (erweitern und kürzen) und mit Dezimalzahlen, sowie zum Umwandeln von Brüchen in Dezimalzahlen und umgekehrt.

Im Bereich Alltagswissen (10) tauchen oft Aufgabenstellungen auf, in denen der Dreisatz verwendet werden kann und in denen proportionale und antiproportionale Zusammenhänge, insbesondere in konkreten Alltagssituationen, erkannt werden müssen.

Für das Verständnis und zum Üben der Grundrechenarten und Rechengesetze (11) müssen die Schüler bei vielen Aufgaben Kopfrechnen oder das Ergebnis einer Rechnung grob überschlagen. Dabei sind alle Grundrechenarten mit ganzen Zahlen sowie mit Brüchen und Dezimalzahlen vertreten. Ebenso müssen sie die jeweiligen Fachbegriffe richtig verwenden und erklären können. In einigen Aufgaben werden Rechengesetze wie das Distributivgesetz benötigt. Der Begriff der Potenz muss sowohl erklärt sowie mit Potenzen gerechnet werden.

Im Bereich „Messen und Einheiten" (12) werden bei den Aufgabenstellungen, besonders bei Text- und Schätzaufgaben, oft verschiedene Einheiten verwendet. Die Schüler müssen die Einheiten richtig zuordnen und erklären sowie verschiedene Einheiten ineinander umrechnen können. Viele Beispiele zu Größen sind dem Alltag oder der Welt, wie z.B. dem

Tierreich, entnommen. Der Betrag einer Zahl muss von den Schülern angegeben werden können. Ebenso müssen sie das Konzept des Betrags erklären können.

In Bezug auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung (14) müssen die Begriffe „Maximum und Minimum" erklärt werden können. Ebenso das arithmetische Mittel und der Median, die auch bestimmt werden müssen. Zum Begriff des Medians gibt es auch einen Lexikonartikel. Zur Wahrscheinlichkeitsrechnung allgemein gibt es weniger Aufgaben als zu anderen Bereichen, da es sich schwierig gestaltet, Aufgaben zu stellen, die in ein bis zwei Minuten lösbar sind.

Die Schüler lernen sicher mit den Zahlbereichen der natürlichen Zahlen ($\mathbb{N}$), der ganzen Zahlen ($\mathbb{Z}$) und der rationalen Zahlen ($\mathbb{Q}$) (15) umzugehen. In einigen Aufgaben müssen sie rationale Zahlen vergleichen und anordnen sowie mit ihnen rechnen. Ebenso müssen sie die Unterschiede und Zusammenhänge zwischen den jeweiligen Zahlbereichen benennen können. Ihnen muss klar sein, dass in jedem Intervall unendlich viele rationale Zahlen, aber nicht unendliche viele ganze Zahlen, liegen.

Zum Thema Teilbarkeit (16) gibt es einige Aufgaben, in denen die Schüler entscheiden müssen, ob eine Zahl durch eine andere Zahl teilbar ist. Dabei müssen sie Teilbarkeitsregeln anwenden sowie den Begriff der Quersumme kennen.

Des Weiteren gibt es Aufgaben zu verschieden Stellenwertsystemen, zum Runden, zu Mustern, beispielsweise Zahlenfolgen, sowie Aufgaben, in denen Unbekannte auftauchen. Die Codes 01 (Geschichte), 02 (Personen), 04 (Vorstellungsvermögen), 06 (Rätselaufgaben und Fangfragen), 08 (Schätzen), 09 (Textaufgaben) und 13 (Weiterführende Aufgaben) beziehen sich nicht explizit auf Themen, die im Bildungsplan vorkommen, sondern reichen über den Schulkontext hinaus. Die Codes 01 und 02 enthalten Aufgaben zur Geschichte und zu berühmten Mathematikern. Der Code 04 beinhaltet Aufgaben zum räumlichen Vorstellungsvermögen, zum Vorstellungsvermögen geometrischer Formen und abstrakter Begriffe. Zu Rätselaufgabe und Fangfragen (06) zählen Rätsel und solche Aufgaben, die keine Lösung zulassen oder den Spielern eine Falle stellen, wie z. B. folgende Aufgaben:

> „Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:
> Was ist am schwersten?
> a) 1 Kilo Blei
> b) 1000 g Federn
> c) 1 Kilo Holz"

> „Um diese Karte zu gewinnen, löst diese Aufgabe:
> Ein Schäfer hat 34 Schafe und 16 Ziegen. Wie alt ist er?"

Bei den Schätzaufgaben (08) müssen unterschiedliche Größen geschätzt werden. Dabei müssen die Schüler Einheiten verwenden und über ein großes Alltags- bzw. Weltwissen verfügen, da sich viele Aufgaben auf reale Dinge, wie z. B. den Mount-Everest oder Entfernungen innerhalb Deutschlands, beziehen. Die Textaufgaben (09) variieren stark in den Themen. Die Schüler sollen lernen, die wichtigen Informationen aus den Texten herauszufiltern und mathematisch zu formulieren. Der Code 13 enthält nur Themen, die normalerweise nicht im Schulunterricht behandelt werden, aber für Schüler verständlich sind. Dazu zählen beispielsweise Graphentheorie, Kombinatorik und algebraische Grundlagen.

Bezüglich der Spielgattung handelt es sich bei Ganita um ein Regelspiel im Sinne Piagets. Es gibt Spielregeln, die die erlaubten Spielzüge und das Spielziel beschreiben (siehe Anhang). Insbesondere ist Ganita ein Brettspiel, da sich die Spieler mit ihren Spielfiguren auf einem Brett fortbewegen können.

Die soziale Struktur ist gemischter Natur. Ganita ist ein kooperatives Spiel, da die Spieler versuchen, die Aufgaben in Teams zu lösen und somit zusammenarbeiten müssen. Es enthält aber auch kompetitive Elemente, da die Teams gegeneinander spielen und versuchen mehr Karten, als die anderen zu gewinnen. Erwachsene nehmen am Spiel in Form des Lehrers teil. Dieser hat eine begleitende und unterstützende Rolle während des Spiels. Die Schüler spielen weitgehend frei und eigenständig. Bei Fragen können sie sich an den Lehrer wenden. Vor dem Spiel kann der Lehrer Themen oder Spielregeln zur Vorbereitung der Schüler ansprechen und nach dem Spiel Themen vertiefen, festigen und in den Unterricht miteinbauen.

Ganita setzt den Fokus auf mathematische Aktivitäten, das Erkunden mathematischer Zusammenhänge, d.h. darauf, Mathematik aktiv zu betreiben. Das Spiel enthält aber auch eine Metaebene. Die Aufgaben und Spielmechanismen, wie z. B. die kooperative Komponente, regen zur Reflexion über die Natur der Mathematik und über mathematisches Wissen und dessen Erwerb an (siehe Kapitel 5.3).

Das Lexikon besteht aus zwei Teilen. Der erste Teil enthält kurze Lebensläufe aller Personen, zumeist Mathematiker, die auf den Spielkarten auftauchen. Der zweite Teil erklärt Begriffe, die die Schüler möglicherweise noch nicht kennen. Die meisten dieser Begriffe sind mathematisch, aber zum Teil tauchen auch Begriffe aus anderen Bereichen auf, die entweder den Schülern fremd oder schlicht von Interesse sein könnten. Das Lexikon ist so umfangreich wie möglich, jedoch nicht vollständig. So gibt es sicherlich in manchen Lexikonartikeln weitere Begriffe, die die Schüler nicht kennen. Diese können aber etwa in Eigenarbeit recherchiert werden. Begriffe, die im Lexikon erklärt werden, sind auf den Aufgabenkarten mit einem Pfeil markiert. Innerhalb des Lexikons gibt es ebenfalls Querverweise. Das Lexikon kann während des Spiels, aber auch weiterführend im Unterricht verwendet werden.

2.2. Kategorien

Ganita enthält insgesamt 483 Spielkarten, die in fünf Kategorien unterteilt sind. Diese teilen sich wiederum grob in weitere Unterkategorien ein, für die im Folgenden immer ein Beispiel geben wird.

Die Kategorie „Mach dich verständlich" enthält die Unterkategorien „Tabukarten", „freies Erklären", „Pantomime" und „Zeichnen". Beispiele sind:

> „Um diese Karte zu gewinnen, erkläre diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst weder das Wort selbst, Teile davon, noch die verbotenen Wörter verwenden.
> Die ganzen Zahlen
> Verboten: natürliche Zahlen, rationale Zahlen, negativ"
>
> „Um diese Karte zu gewinnen, …
> …erkläre wie man mit einem Zirkel Längen messen kann."
>
> „Um diese Karte zu gewinnen, stelle diesen Begriff pantomimisch dar. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche machen.
> Die Zahlengerade"
>
> „Um diese Karte zu gewinnen, zeichne diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche und keine Gesten (erklärende Bewegungen) machen.
> Balkendiagramm"

Die Kategorie „Begreife die Welt" unterteilt sich in die Unterkategorien „Modellieren", „Wo kommt … im Alltag vor?", „Alltagswissen" und „Schätzen". Beispiele sind:

> „Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet diese Frage:
> Anna radelt 15 Minuten 3 km weit. Wie weit ist sie nach einer Stunde gefahren
> Lösung: 12 km"
>
> „Um diese Karte zu gewinnen, nennt ein Beispiel aus dem Alltag, wo man diese mathematische Idee sinnvoll benutzen kann. Jeder vernünftige Vorschlag zählt!
> Der Mittelpunkt eines Kreises.
> Beispiel: Zeigerbefestigung an einer Uhr"

„Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet diese Frage:
Was sind schwarze und rote Zahlen?
Lösung: Guthaben und Schulden oder Gewinn und Verlust“

„Um diese Karte zu gewinnen, schätzt die Antwort auf diese Frage:
Wie lange gibt es das Universum?
Lösung: Etwa 13,81 ± 0,04 Milliarden Jahre. Alle Antworten zwischen 10 und 16 Milliarden Jahren sind eine gute Schätzung.“

Die Kategorie „Finde es heraus“ unterteilt sich in die Unterkategorien „Wahr-Falsch“, „Multiple Choice“, „Kombinationsfragen“, „Fortsetzen von Folgen und Mustern“ und „Fehler Finden und Verbessern“. Beispiele sind:

„Um diese Karte zu gewinnen, bewertet diese Aussage (richtig) mit ‚wahr‘ oder ‚falsch‘:
Jede ungerade Zahl ist durch 3 teilbar.
Lösung: Falsch (z.B. 1, 5, 7)“

„Um diese Frage zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:
Was ist eine Wurzel?
a) Das untere Ende eines Zahnes
b) Die Umkehrung des Quadrierens
c) Das obere Ende eines Baumes
d) Eine Gleichungsart
Lösung: a) und b)“

„Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:
Welche Möglichkeiten gibt es, die Zahl 4 beim Würfeln mit zwei Würfeln zu erhalten?
Lösung: (1,3), (3,1), (2,2)“

„Um diese Karte zu gewinnen, …
…findet die Zahl in der Lücke:
100, 81, 64, __.
Begründet eure Antwort!
Lösung: 49 (-19, -17, -15, …)“

„Um diese Karte zu gewinnen, findet den Fehler in dieser Rechnung:
2 + 3 • 5 = 25
Lösung: Die Klammern wurden vergessen. Oder: Punkt vor Strich wurde missachtet.“

Die Kategorie „Sei kreativ“ enthält die Unterkategorien „Objekte mit bestimmten Eigenschaften finden“, „Umrechnen“, „Basteln und Zeichnen“ und „unbekannte Aufgabentypen“. Beispiele sind:

„Um diese Karte zu gewinnen, findet eine Figur, die diese Eigenschaften hat:
Hat gleich viele Seiten wie Ecken, alle Seiten sind gleichlang.
Beispiel: gleichseitiges Dreieck, Quadrat“

„Um diese Karte zu gewinnen, findet eine andere Darstellung für diese Zahl:
0.125
Beispiel: 1/8 oder 3/24“

„Um diese Karte zu gewinnen, …
…falte ein DIN-A4-Blatt so, dass ein gleichseitiges Dreieck entsteht.“

„Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage (richtig) mit ‚ja‘ oder ‚nein‘:
Kann ich von jedem Punkt aus in einem Donut zu einem beliebigen anderen Punkt gelangen und dabei immer innerhalb des Donuts bleiben? Ich will dabei den kürzesten Weg nehmen.
Lösung: Nein. Der Donut ist nicht konvex.“

Die Kategorie „Wie war es wirklich“ hat keine Unterkategorien. Sie enthält Aufgaben zur Mathematikgeschichte und zu berühmten Mathematikern. Aufgaben sind z. B.:

„Um diese Karte zu gewinnen, bewertet diese Aussage (richtig) mit ‚wahr‘ oder ‚falsch‘:
1897 wollte man im Bundesstaat Indiana mathematische ‚Wahrheiten‘ per Gesetz festlegen.
Lösung: Wahr. Unter anderem wollte man Pi auf den Wert 3,2 festlegen.“

„Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:
Wie hieß erste Frau, die die Fields-Medaille gewann?
a) Emmy Noether
b) Maryam Mirzakhani
c) Hypatia von Alexandria
d) Miley Cyrus
Lösung: b)“

Manche Unterkategorien kommen auch in anderen Kategorien vor, wenn es sich anbietet. Z. B. gibt es in der Kategorie „Sei kreativ“ auch Schätzaufgaben. Außerdem tauchen Aufgabenkarten auf, die keiner der Unterkategorien zugeordnet werden.

Ein wichtiges Ziel der Kategorie „Mach dich verständlich“ ist, dass die Schüler lernen über Mathematik zu sprechen. Sie sollen mathematische Inhalte erklären, beschreiben und den anderen vermitteln. Dabei ist es wichtig, dass sie sich verständlich ausdrücken. Diese Kategorie ermöglicht den Schülern Zusammenhänge zwischen mathematischen und Alltagsbegriffen zu entdecken, sowie Eselsbrücken zu bauen. Zudem gibt die Tatsache, dass man jemand anderem etwas erklären kann, Rückmeldung darüber, ob man es wirklich verstanden hat. Weiterhin ermöglicht diese Kategorie den Austausch über verschiedene Vorstellungen und Konzepten der Schüler. Jeder hat eine andere Vorstellung von Mathematik und eine andere Lösungsstrategie. Durch das gegenseitige Erklären kann dies den Schülern bewusst werden. Zusätzlich können sie neue Sichtweisen auf das Fach kennenlernen und andere Herangehensweisen in ihr Repertoire aufnehmen.

Die verschieden Aufgabentypen „Erklären, Zeichnen, Pantomime“ berücksichtigen verschiedene Repräsentationsebenen des Wissens, die sich nach Brunner in die enaktive, die ikonische und die symbolische Ebene einteilen lassen (Bruner, 1974). Dementsprechend spielen sich die Pantomime- und Zeichenaufgaben auf der enaktiven und ikonischen Ebene und die Tabukarten, sowie die Erkläraufgaben, auf der symbolischen Ebene ab.

Die Kategorie „Begreife die Welt“ soll den Schülern ermöglichen, einen authentischen statt eines artifiziellen Bezugs zwischen Mathematik und Realität herzustellen. Einerseits indem sie herausfinden, wo sich die Mathematik im Alltag versteckt, andererseits indem sie erkennen, wo sie im Alltag oder auch in anderen Wissenschaften angewandt wird. Den Schülern wird somit die große Bedeutung der Mathematik bewusst und es ist für sie nachvollziehbar, warum das Fach in der Schule unterrichtet wird. Durch die Schätzaufgaben lernen die Schüler Größen einzuordnen und mit verschiedenen Größenordnungen umzugehen. Die Aufgaben decken mehrere Themenbereiche, auch außerhalb der Mathematik, ab, um viele Interessen zu berücksichtigen und nicht nur eine bestimmte Gruppe von Schülern anzusprechen.

Die Kategorie „Finde es heraus“ dient dazu, vorhandenes Wissen abzufragen und zu wiederholen. Zudem können die Schüler, zumindest in gewissem Maße, neues Wissen generieren. Dabei sollen Informationen nicht stupide abgerufen und wiedergegeben werden, sondern es soll eine Reflexion und Vernetzung stattfinden. Die Schüler sollen Aussagen und Lösungen kritisch betrachten und mit Hilfe logischen Denkens als richtig oder falsch beurteilen. Dabei stärken sie unter anderem ihre Kombinationsfähigkeit sowie das eigenständige Denken.

Es soll nicht nur das mathematische Wissen der Schüler abgefragt werden, sondern sie sollen auch die Möglichkeit bekommen, Mathematik zu betreiben und kreativ zu sein. Das geschieht in der Kategorie „Sei kreativ“. Dabei erkennen sie, dass es in der Mathematik primär nicht darum geht, auswendig Gelerntes abzurufen, sondern sich Lösungen und Lösungswege selbst zu erschließen. Sie können eigene Entdeckungen machen, selbstständig denken und somit auch ein hohes Maß an Selbstwirksamkeit erleben.

Indem sie Objekte mit bestimmten Eigenschaften finden, lernen sie zu klassifizieren und Schlussfolgerungen zu ziehen. Das Umrechnen fördert den selbstbewussten Umgang mit Zahlen und Rechnungen und hat zusätzlich eine kreative Komponente, weil die Schüler selbst entscheiden können, wie sie umrechnen möchten. Das Basteln und Zeichnen berücksichtigt wieder die verschiedenen Repräsentationsebenen des Wissens und fördert das räumliche Denken. Das entdeckende Lernen und das Finden eigener Lösungswege wird vor allem durch die unbekannten Aufgabentypen angeregt. Die Schüler können sich neue Bereiche und Kenntnisse der Mathematik erschließen, auch wenn diese in der Schule noch nicht behandelt wurden oder auch gar nicht behandelt werden. Bei den Aufgabenstellungen wurde hier besonders darauf geachtet, dass es sich um machbare Aufgaben handelt, die verständlich formuliert sind.

Die Geschichte der Mathematik, die Thema der Kategorie „Wie war es wirklich“ ist, wird im Unterricht häufig gar nicht oder nur am Rande behandelt. Diese Kategorie hat zum Ziel, den Schülern eine Idee davon zu geben, wie sich die Mathematik über die Jahrhunderte hinweg entwickelt hat und dass das heutige Wissen durch einen langen und intensiven Prozess zustande gekommen ist. Ebenso zeigen die verschiedenen Aufgaben auf, dass in diesem Forschungsprozess immer wieder Fehler gemacht wurden und die großen Mathematiker ebenfalls Verständnisprobleme hatten. Das soll den Schülern die Angst vor eigenen Fehlern nehmen. Gleichzeitig sollen die Aufgaben und Erzählungen die Persönlichkeiten für die Schüler greifbarer machen und Sympathien für die Mathematiker wecken. Zudem wird ein anderer Bezug zur Mathematik hergestellt, da das in dieser Kategorie behandelte Wissen weniger abstrakt ist.

3. Spiele in der Bildung

3.1. Serious Games – Game-Based Learning – Lernspiele

In der aktuellen Forschung zu Spielen, die zum Ziel haben den Spielern etwas beizubringen, tauchen verschiedene Begriffe auf, um diese Spiele zu bezeichnen. Besonders häufig wird von „Serious Games“ (SG) oder „Game-Based Learning“ (GBL) gesprochen, weniger häufig taucht der Begriff „Lernspiel“ auf. Die englische Entsprechung „educational game“ lässt sich jedoch öfter finden (Echeverría et al., 2011; Lämsä, Hämäläinen, Aro, Koskimaa, & Äyrämö, 2018; Roungas, 2016) und wird auch in Artikeln zu SG verwendet. Wie aber später deutlich wird, umfassen SG ein weit größeres Spektrum als reine „educational games“. Zunächst sollten diese Begriffe voneinander abgegrenzt werden, um dann das Spiel „Ganita“ adäquat einordnen zu können.

Bevor auf die einzelnen Definitionen eingegangen wird, wird zuerst die Frage geklärt, ob man überhaupt noch von einem Spiel sprechen kann, wenn es primär nicht mehr nur um das Spielen an sich geht, sondern darum, den Spielern etwas beizubringen oder das Spiel im Allgemeinen eine zweckgebundene Absicht verfolgt. Beschränkt man sich ausschließlich auf Unterhaltungsspiele, dann enthalten auch diese eine Lernkomponente, denn die Spieler erlernen die Regeln und entwickeln Strategien, um sich zu verbessern. Sie lernen also etwas dazu, auch wenn dies sehr spezifisch sein kann. Spiele sind somit immer mit Lernen verknüpft, weswegen der Spielcharakter durch den verstärkten Fokus auf die Lernkomponente nicht unbedingt verloren gehen muss. Ebenso spricht nichts dagegen etwas als Spiel zu bezeichnen, solange es auch als solches empfunden wird (Giessen, 2015). Kriterien, die ein (Lern)spiel erfüllen sollte, um als echtes Spiel empfunden zu werden, geben z. B. Krampe und Mittelmann (1999). Nach ihnen sollte ein Lernspiel

> „(1) …den Mitspielern Freiraum für eigene Entscheidungen einräumen.
> (2) …einen für den Mathematikunterricht unüblichen Handlungsablauf enthalten.
> (3) …im Spielverlauf immer wieder kleine Erfolgserlebnisse erfahrbar machen.
> (4) …allen Mitspielern, auch den schwächeren, eine Gewinnchance einräumen (z. B. durch den Einbau von Glückskomponenten, wie Würfeln oder Aktionsfelder)
> (5) …nach leicht verständlichen Regeln ablaufen.
> (6) …ein erstrebenswertes Ziel vermitteln.
> (7) …frei von Leistungsdruck sein.
> (8) …bereits bekannten Spielen im Ablauf möglichst ähneln.
> (9) …den Mitspielern auch Unterhaltung und Entspannung bieten.
> (10) …z. B. durch Wettkampfcharakter spannend sein.“ (Krampe/Mittelmann 1999, S.10-12 in: Heinz, 2018, S.17)

Folgendes Zitat fasst den Zusammenhang zwischen Spielen und Lernen nochmals zusammen:

> „Spielen ist nicht die Gegenwelt des Lernens, sondern ein Teil, eine Erscheinungsform von Lernen. Spiele sind ein Acker für Kreativität, für Intuition, aber auch für Konzentration und Ausdauer, für Phantasie und Intensität." (Tehrani, 2009, S.33).

SG werden in der Literatur unterschiedlich definiert und eine klare einheitliche Definition gibt es (noch) nicht (Breuer & Bente, 2010; Girard, Ecalle, & Magnan, 2013). So definieren Girard und Ecalle (2013) SG als Videospiele, die einen „useful purpose" haben. „Useful purpose" heißt dabei, dass sie Spielen und Lernen kombinieren, wobei Lernen gegenüber der Unterhaltung im Vordergrund steht (Girard et al., 2013). Eine sehr umfangreiche und detaillierte Definition gibt Marsh (2011):

> "Serious games are digital games, simulations, virtual environments and mixed reality/media that provide opportunities to engage in activities through responsive narrative/story, gameplay or encounters to inform, influence, for well-being, and/or experience to convey meaning. The quality or success of serious games is characterized by the degree to which purpose has been fulfilled. Serious games are identified along a continuum from games for purpose at one end, through to experiential environments with minimal or no gaming characteristics for experience at the other end." (Marsh, 2011, S.63).

Auffällig bei diesen Definitionen, sowie bei vielen weiteren Artikeln, die den Begriff SG verwenden, ist, dass sie sich ausschließlich auf digitale Spiele beziehen. Das vorherrschende Verständnis von SG scheint also zu sein, dass es sich dabei nur um digitale Spiele handelt. Es gibt aber auch Definitionen, die diese Einschränkung nicht machen oder explizit darauf hinweisen, dass es sich sowohl um digitale als auch nicht-digitale Spiele handeln kann:

> "A serious game is a game in which education (in its various forms) is the primary goal, rather than entertainment" (Michael & Chen, 2005, S.17).

Nach Susi und Johannesson (2015) kommen alle Definitionen darin überein, dass "serious games […] (digital) games used for purposes other than mere entertainment" sind (Susi, Johannesson, & Backlund, 2007, S.1), was aber eine sehr allgemein gehaltene Definition ist. Es lohnt sich auch, einen Blick auf den Ursprung des Begriffes zu werfen, der von Clark C. Abt eingeführt wurde. Ihm zufolge besteht die Idee von SG darin, Spiele zu anderen Zwecken als nur zur Unterhaltung und zum Spaß zu nutzen. Insbesondere werden sie für die Bildung verwendet (Breuer & Bente, 2010). Diese Beschreibung stimmt also weitestgehend mit der von Michael und Chen gegebenen überein. Zudem sollte beachtet werden, dass die Übergänge zwischen SG und Unterhaltungsspielen fließend sind. Auch herkömmliche

Unterhaltungsspiele haben einen Lerneffekt auf die Spieler (wie oben schon erwähnt), sowie SG immer auch unterhalten und Spaß machen. Zumindest sollen sie das, um überhaupt von Spielern als Spiel anerkannt zu werden. Dies spricht für das von Marsh vorgeschlagene Kontinuum (Marsh, 2011).

Des Weiteren weisen Girard und Ecalle (2013) darauf hin, dass es verschiedene Typen von SG gibt, die auch zu unterschiedlichen Zwecken und in unterschiedlichen Bereichen eingesetzt werden. So kommen SG nicht nur in Bildung, sondern auch im Militär und im Gesundheitswesen zum Einsatz (Girard et al., 2013). In der Literatur gibt es unterschiedliche Vorschläge, um SG zu klassifizieren. So teilen z. B. Breuer und Bente SG in ihren primären Bildungsinhalt, ihr primäres Lernziel, das Alter der Zielgruppe und die Plattform, auf der sie gespielt werden, ein (Breuer & Bente, 2010). Michael und Chen nehmen eine spezifischere Einteilung in „military“, „government“, „educational“, „corporate“, „healthcare“, „political“, „religious“ and „art games“ vor (Michael & Chen, 2005). Die Klassifizierung, wie sie von Breuer und Bente vorgeschlagen wird, orientiert sich an verschiedenen Definitionen und Klassifizierungsversuchen und erscheint somit als vollständig und zusätzlich übersichtlich (Breuer & Bente, 2010).

Bei der Betrachtung dieser vielen verschiedenen Definitionen gibt es zwar keinen offensichtlichen Grund, nicht-digitale Spiele aus der Kategorie SG auszuschließen, jedoch sollte nicht ignoriert werden, dass in der Praxis die Studien zu SG fast ausschließlich nur digitale Spiele berücksichtigen. Warum es trotzdem sinnvoll sein kann, diese Studien auch im Hinblick auf nicht-digitale Spiele zu analysieren, wird in einem späteren Abschnitt dieses Kapitels erklärt.

Ähnlich wie für SG, gibt es keine einheitliche Definition für den Begriff GBL (Game-Based Learning). Beschreibungen ähneln oft denen von SG und eine klare Grenze zwischen den beiden Begriffen zu ziehen, scheint nicht möglich. So betrachten Hainey und Conolly (2016) GBL als Unterkategorie von SG (Hainey, Connolly, Boyle, Wilson, & Razak, 2016) und Boyle und Hainey sprechen sogar davon, dass der „term ‚serious games‘ seems to be used interchangeably with GBL” (Boyle et al., 2016, S.20). Um GBL von ähnlichen Begriffen abzugrenzen, definieren Hainey und Connolly das Konzept in ihrer Literaturreview als “production of a specially implemented application for the purposes of learning, teaching a particular subject of promoting engagement” (Hainey et al., 2016, S.203), wobei sie den Begriff gleichbedeutend mit “games for learning” verwenden. Die Definition von Plass und Homer (2015), die GBL als “type of game play with defined learning outcomes” (Jan L. Plass, Homer, & Kinzer, 2015, S.259) beschreiben, ist nicht von den obigen Definitionen von SG zu unterscheiden. In ihrem Artikel argumentieren sie, dass dem GBL kognitive, affektive, verhaltensbedingte und soziokulturelle Perspektiven zugrunde liegen und es somit auch das *Engagement*[2] in diesen Bereichen fördere (Jan L. Plass et al., 2015).

In Bezug auf den digitalen Charakter von GBL sind die Autoren sich nicht einig. So beziehen sich manche Autoren fast nur auf digitale Spiele, wie auch bei SG (Kiili, Devlin, & Multisilta, 2015; Jan L. Plass et al., 2015), andere hingegen betonen, dass es sich nicht nur um digitale Spiele, sondern auch um Brett- und Kartenspiele handeln könne (Breuer & Bente, 2010). Auch wenn alle Autoren GBL ebenso wie SG als nicht klar definierten Begriff sehen, so gibt der Begriff selbst schon viel Auskunft über seine Bedeutung: es handelt sich um Lernen, das spielbasiert, also mit Hilfe von Spielen, stattfindet. Womöglich braucht es somit keine umfangreichere oder genauere Definition mehr. Fasst man GBL so auf, so ist auch klar, dass Ganita und das von Ganita geförderte Lernen hier eingeordnet werden kann, da es sich eben um spielbasiertes Lernen handelt.

Zu dem Begriff des Lernspiels finden sich einige Definitionen, die sich zum Teil stark unterscheiden:

> „[Lernspiele sind] eine schuleigentümliche Lernform, die den Schüler in eine Spielhaltung zu setzen versucht. Es stehen auch industriell gefertigte Lernspiele (Quartette, Lottos, Lese- und Rechenspiele, Sprachspiele) zur Verfügung [...] Lernspiele sind in Wirklichkeit Arbeitsmittel, die vom Spielgerät nur den Namen und die äußere Form haben.“ (Schorb: "160 Stichworte zum Unterricht", S.115, in: Tehrani, 2009, S.32)

Schorb schränkt in dieser Definition das Konzept auf die Umgebung Schule ein und ignoriert dabei, dass das Lernspiel auch in anderen Kontexten auftauchen kann. Den Spielcharakter spricht er dem Lernspiel komplett ab, indem er behauptet, dass es sich in Wirklichkeit um ein Arbeitsmittel handele. Ebenso tun dies Meins und Schiller in ihrer Definition:

> „Lernspiele sind also keine echten Spiele, sondern spielgeformte Arbeitsmittel, die dem Kinde die Möglichkeit geben, Aufgaben in einer seiner Lebensform angemessenen Weise zu bewältigen.“ (Meins/Schiller: "Lern- und Arbeitsmittel", in: "Handbuch für Lehrer.", Bd.1, 1966, S.456, in: Tehrani, 2009, S.33)

---

[2] *Engagement* meint „das mit Hingabe verbundene Beteiligtsein“ (Wirtz & Strohmer, 2014, S.481). Insbesondere bezieht sich der Begriff hier auf das *Student Engagement*, das definiert ist als „the student’s psychological investment in and effort directed toward learning, understanding, or mastering the knowledge, skills, or crafts that academic work is intended to promote“ (Newmann, 1992, S.12). Student Engagement findet statt, wenn „young people have invested themselves, their energy, and their commitment to the learning environment“ (Dary, Pickeral, Shumer, & Williams, 2016, S.5).

Wie aber schon zu Beginn dieses Kapitels gezeigt wurde, stehen Lernen und Spielen in engem Zusammenhang und durch den Fokus eines Lernspiels auf verschiedene Lernziele muss nicht unbedingt der Spielcharakter verloren gehen. Eine weitere Definition bezieht sich wieder nur auf das Lernspiel als Unterrichtsmittel:

> „sie [die Lern- und Leistungsschule] hat zum anderen auch das Spiel als ein Mittel entdeckt, Unterrichtsziele in einer besonders handlungs-orientierten Weise zu realisieren“ (Retter, 2003, S.139).

In ihrem Wörterbuch der Pädagogik geben Schaub und Zenke (1995) mehrere Kriterien an, die ihrer Meinung nach ein Lernspiel erfülle. Zum einen sei es ein Lern- und Arbeitsmittel mit didaktischer Absicht, das in seiner äußeren Form einem Gesellschaftsspiel entspricht. Der Inhalt orientiere sich an der Erreichung bestimmter Lernziele und -inhalte. Ziel des Lernspiels sei es, Wissen und Kenntnisse zu vermitteln sowie zu wiederholen und zu üben, womit es auch nicht mehr zweckfrei sei. (Schaub & Zenke, 1995, S.398). Diese Definition ist ausführlich und schlüssig, übersieht aber mögliche andere Lernziele, wie zum Beispiel das Stärken der sozialen Kompetenz oder die Änderung der Sicht auf den Lerninhalt.

Tehrani (2009) beschreibt eine mögliche Klassifizierung mathematischer Lernspiele hinsichtlich verschiedener Kriterien. Sie unterscheidet zwischen materialgebundenen und materialungebundenen Spielen, Spielen die allein oder zu mehreren gespielt werden können, Spielen mit und ohne Wettbewerbscharakter, sowie Strategie- und Denk-, Zufalls- oder Regelspielen (Tehrani, 2009, S.38ff).

In den verschiedenen Definitionen zu Lernspielen ist ein größerer Bezug zum Schulunterricht erkennbar als in den Definitionen zu SG und GBL, da sie als didaktisches Mittel für den Schulunterricht gesehen werden. Wie oben schon erwähnt beziehen sich SG und GBL oft auf digitale Spiele, weswegen diese Begriffe nicht geeignet für Ganita sind. Da es sich um ein Spiel handelt, das primär für den Unterricht konzipiert wurde, durchaus aber auch Zuhause mit Familien oder Freunden gespielt werden kann, und die Definitionen zu Lernspielen insbesondere nicht-digitale Spiele miteinschließen, wird im Folgenden der Begriff „Lernspiel“ für Ganita verwendet, wobei Wert darauf gelegt wird, dass es sich um ein „echtes“ Spiel handelt und nicht um ein reines Arbeitsmittel.

Sowie Ganita erstellt wurde, erfüllt es alle Anforderungen, die Krampe und Mittelmann an ein echtes Spiel stellen (siehe oben). So enthält es z. B. mit Würfeln und Karten mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad, die nach Zufall gezogen werden, Glückskomponenten, die schwächeren Schülern ebenfalls eine Chance zu gewinnen ermöglichen, und ähnelt dem Spiel „Activity“. Auch wurde in den Unterrichtsbesuchen der

Spielcharakter von Ganita von den Schülern nie infrage gestellt und sie betonten oft die Abwechslung, also einen unüblichen Handlungsablauf, die es zum herkömmlichen Mathematikunterricht darstellt.

Insbesondere handelt es sich bei Ganita um ein Regel-, bzw. Brettspiel. Der Begriff Brettspiel (engl. Board Game) wird hier aufgeführt, da es, wie wir später sehen werden, einige Studien ausschließlich zu Board Games gibt, die hinsichtlich der Effektivität von Brettspielen (und damit von Ganita), aufschlussreich sind. Trotzdem ist es sinnvoll, Studien zu analysieren, die sich mit der Effektivität von SG bzw. GBL beschäftigen, auch wenn diese nur digitale Spiele berücksichtigen, denn „games and game design are transmedial categories themselves“ (Deterding, Khaled, Nacke, & Dixon, 2011, S.2). Das bedeutet, dass die grundlegende Struktur von Spielen, unabhängig ob digital oder nicht, dieselbe ist. So gibt es laut Plass und Homer in allen Spielen drei Schlüsselelemente, die aus „challenge“, „response“ und „feedback“ bestehen und einen Kreislauf bilden. Ebenso wiesen alle Spiele dieselben Designmerkmale auf: „incentive system“, „game mechanics“, die sich in „learning mechanics“ und „assessment mechanics“ unterteilen, „aesthetic design“, „narrative design“ und „musical score“, wobei der „musical score“ nicht zwingend in analogen Spielen zu finden sei (Jan L. Plass et al., 2015).

Auch treten einige Eigenschaften digitaler Werkzeuge, die laut einiger Studien einen positiven Lerneffekt erzeugen, bei analogen Spielen auf. So z. B. ein hohes Maß an Interaktivität, der Gebrauch von ansprechenden Grafiken sowie die Akzeptanz des Spiels bei den Spielern als motivierende und unterhaltsame Aktivität (Girard et al., 2013). Es gibt keinen Grund, warum ein nicht-digitales Spiel nicht ebenfalls ein hohes Maß an Interaktivität verlangen, attraktive Grafiken verwenden oder die Spieler es als motivierende und unterhaltsame Aktivität wahrnehmen sollten. Zudem sind die Probleme, die auftauchen, wenn Schüler eine Aufgabe lösen, oft dieselben, egal ob die Aufgabe auf einem Blatt Papier, einer Spielkarte oder auf einem Bildschirm erscheint. So konnten Ninaus et al. (2017) zeigen, dass Schüler beim Verstehen der Größe eines Bruchs in verschiedenen Kontexten ähnliche Schwierigkeiten haben (Ninaus, Kiili, McMullen, & Moeller, 2017). Es können somit Rückschlüsse hinsichtlich der Effektivität von digitalen Spiele auf nicht-digitale Spiele gezogen werden.

3.2. Effektivität von Serious Games und Lernspielen

In diesem Kapitel werden sowohl theoretische als auch empirische Ansätze beschrieben, in denen etwas über die Effektivität von SG und Lernspielen ausgesagt wird. Die Spiele, die analysiert werden, verfolgen verschiedene Ziele. Zum Teil geht es um reine Fachkenntnisse, eine isolierte mathematische Fähigkeit wie z. B. das Vergleichen der Größe zweier Brüche, eine übergeordnete mathematische Fähigkeit wie z. B. abstraktes oder logisches Denken oder auch um soziale Fähigkeiten wie das gemeinsame Lernen. Da jedes Spiel hinsichtlich Spieldesign und Spiel- bzw. Lernziel anders ist, stellt es sich als schwierig heraus, allgemeine Kriterien für die Effektivität zu finden, die für alle Spiele gelten.

In den folgenden Unterkategorien werden zunächst Theorien und Studien zu Lernspielen, SG bzw. Board Games vorgestellt und diskutiert. Danach wird auf einige Literaturreviews und Metaanalysen eingegangen, um ein umfassendes Bild vom aktuellen Forschungsstand hinsichtlich der Effektivität der oben genannten Konzepte zu bekommen. Auf eine Analyse der Literatur zu GBL wird aus Gründen des Umfangs der Arbeit verzichtet. Diese überschneidet sich aber häufig mit der Literatur zu SG.

3.2.1. Lernspiele

Zu Lernspielen findet sich viel theoretische Literatur, speziell auch zum Thema Lernspiele im Mathematikunterricht. Empirische Studien finden sich eher weniger und meist handelt sich um ältere Studien (die neueste Studie ist aus dem Jahr 2013 (Gasteiger, 2013)). Zunächst wird auf verschiedene theoretische Überlegungen zum Thema Lernspiele (im Mathematikunterricht) eingegangen und darauffolgend werden einige Studien zu Lernspielen und eine Review, die den Forschungsstand von 1962 bis 1991 zusammenfasst, vorgestellt.

Homann formulierte schon 1995 sieben Thesen zu Lernspielen im Mathematikunterricht, in die sich die restlichen Beiträge weitestgehend einordnen lassen. In diesem Abschnitt werden die Thesen vorgestellt und weitere theoretische Überlegungen dargelegt.

These 1: „Lernspiele erhöhen die Bereitschaft zur Beschäftigung mit Inhalten des Mathematikunterrichts.“ (Homann, 1995, S.4).

Durch den Spaß am Spiel und die zwanglose Spielsituation sind die Schüler eher bereit, sich mit den mathematischen Themen auseinanderzusetzen. Dabei sei wichtig, dass die Aktivität als Spiel empfunden wird. Laut Homann trägt dazu bei, dass das Spiel konventionellen Spielen entspricht, einen angemessenen Schwierigkeitsgrad hat und die Spielsituation offen gestaltet ist, sowie kein Druck herrscht. Er erwähnt hier zusätzlich, dass die Freude am Spielen auch die Einstellung am gesamten Mathematikunterricht verbessern kann (Homann, 1995, S.4).

Auch andere Autoren argumentieren, dass Lernspiele die Motivation der Schüler für das Fach fördern können und diese für den Lernprozess genutzt werden kann (Heinz, 2018, S.17; Käpnick, 2014, S.180; Niedermann, Schoch Niesser, & Interkantonale Hochschule für Heilpädagogik, 2010, S.308; Popp, 1990, S.308; Tehrani, 2009, S.42; Young-Loveridge, 2004, S.84). Zudem wird von manchen Autoren betont, dass es sich bei der durch Spiele hervorgerufenen Motivation um eine intrinsische Motivation handelt, da der Kontext für die Schüler bedeutsamer ist (Popp, 1990, S.308; Young-Loveridge, 2004, S.84).

Die Abwechslung, die ein Spiel zum herkömmlichen Unterricht darstellt, trägt dazu bei, dass die Schüler motivierter an die Aktivität herangehen (Popp, 1990, S.308; Tehrani, 2009, S.35), ebenso wie das Wegfallen einer Kontrollinstanz in Form des Lehrers, wodurch die Schüler mehr Freude am Spiel empfinden (Tehrani, 2009, S.73). Durch die Motivation wird die Lernbereitschaft und Lernausdauer (Popp, 1990, S.308), sowie eine erhöhte Konzentration und Aktionsbereitschaft der Schüler gefördert (Tehrani, 2009, S.44). Ebenso wie Hosemann gehen Tehrani und Käpnick davon aus, dass Lernspiele zu einer positiven Einstellung gegenüber der Mathematik beitragen bzw. die Schüler ein adäquates Bild von Mathematik erhalten können (Käpnick, 2014, S.113; Tehrani, 2009, S.44).

These 2: „Lernspiele begünstigen soziales Lernen.“ (Homann, 1995, S.5)

Die Schüler müssen während des Spiels, zumindest wenn die Spielstruktur dies vorgibt, zusammenarbeiten und gegenüber ihren Mitspielern argumentieren und begründen. Dadurch werden ein kooperatives Lernen sowie das Voneinanderlernen begünstigt. Ebenfalls müssen sie sich an Regeln halten. Ein wichtiger Punkt ist das richtige Maß an Kooperation und Wettkampfcharakter im Spiel. Zu viel Wettkampfcharakter kann in inhomogenen Gruppen bei schwächeren Schülern zu Frustration führen, während bei zu wenig Wettkampfcharakter Langeweile auftreten kann (Homann, 1995, S.5). Dass Lernspiele das soziale Miteinander, die Kommunikation und soziale Erfahrungen fördern und damit einen Beitrag zum sozialen Lernen leisten, wird häufig in der Literatur erwähnt (Käpnick, 2014, S.180; Niedermann et al., 2010, S.16; Tehrani, 2009, S.44). Heinz erläutert zusätzlich, dass die Interaktion zwischen den Spielern und die Reflektion über die Überlegungen und Handlungen der Mitspieler, sowie das Erklären der eigenen Überlegungen zum Verständnis aller beitragen (Heinz, 2018, S.21).

These 3: „Lernspiele regen zum Entwickeln von Strategien an.“ (Homann, 1995, S.5)

Animiert ein Spiel Schüler zu analysieren, zu kombinieren, Strukturen zu erkennen sowie vorausschauend und schlussfolgernd zu denken, kann es ihnen Denkweisen vermitteln. Durch das Alternieren des Niveaus innerhalb des Spiels kann mit inhomogenen Gruppen gespielt werden (Homann, 1995, S.5f; Tehrani, 2009, S.42). Heinz verallgemeinert diese These, indem sie davon ausgeht, dass Lernspiele nicht nur das Entwickeln von Strategien, sondern allgemein mathematisches Denken durch strategisches Denken, das Anwenden von Regeln und das Reflektieren über Handlungen und Gedanken unterstützt (Heinz, 2018, S.21).

These 4: „Lernspiele ermöglichen die Entfaltung kreativer Fähigkeiten.“ (Homann, 1995, S.6)

Da die Spielsituation frei von Leistungs- bzw. Prüfungsdruck ist, gibt sie mehr Raum für Kreativität, den Schülern die Möglichkeit in verschiedene Richtungen zu denken und neue Wege zu finden (Homann, 1995, S.6), wobei an dieser Stelle angemerkt werden muss, dass dies auch von den Aufgabenstellungen bzw. Spielaktivitäten abhängt. Durch das Ausbleiben einer Prüfungs- bzw. Bewertungssituation in einem Spiel, haben die Schüler keine Angst vor Misserfolgen, da das Scheitern keine großen Auswirkungen hat (Popp, 1990, S.308). Auch Tehrani sieht darin wie Homann einen Anlass für kreatives Verhalten (Tehrani, 2009, S.43). Der Meinung, dass Lernspiele Kreativität fördern, schließt sich auch Käpnick an (Käpnick, 2014, S.180).

These 5: „Lernspiele erleichtern das Sammeln umfangreicher Handlungserfahrungen, die für mathematische Begriffsbildung genutzt werden können.“ (Homann, 1995, S.6)

Bei Lernspielen können mehr Erfahrungen als bei Einzelaufträgen im Unterricht gesammelt werden, wenn es gut strukturiert ist. Somit kann es auch hilfreich für mathematische Begriffsbildungen sein. Homann nennt an dieser Stelle einige Beispiele: „Beschreiben von Gegenständen durch Angabe von Eigenschaften, Finden von Gegenständen zu gegebenen Eigenschaften, Finden und Beschreiben von Beziehungen zwischen Gegenständen, Sortieren von Gegenständen, Zuordnen von Gegenständen zu Mengen, Beschreiben von Mengen, Ordnen von Gegenständen oder Mengen, Finden und Beschreiben von Ordnungsschemata, Lesen von Zeichen, Unterscheiden und Beschreiben räumlicher Relationen, Zusammensetzen und Zerlegen ebener Figuren und räumlicher Körper, Unterscheiden und Benennen geometrischer Figuren und Körper“ (Homann, 1995, S.6).

These 6: „Lernspiele können Schüler zum Beginn eigener Untersuchungen anregen.“ (Homann, 1995, S.7)

Lernspiele können Schüler dazu veranlassen, eigene Hypothesen aufzustellen, die auch außerhalb des Spielkontextes untersucht werden können. Durch Lernspiele könne also Entdeckendes Lernen gefördert werden (Homann, 1995, S.7).

These 7: „In Form von Lernspielen erzielen Übungen größere Aufmerksamkeit und sind damit effektiver.“ (Homann, 1995, S.7)

Die durch Lernspiele hervorgerufene Motivation sowie das intensivere Üben und die aktivere Beteiligung führen zu einem effektiveren Lernen (Homann, 1995, S.7). Auch Popp stimmt darin überein, dass die Aufmerksamkeit während eines Lernspiels gebündelt wird und durch das Einlassen der Schüler auf das Spiel, und die damit verbundene motorische und kognitive Aktivität, Lernprozesse stattfinden (Popp, 1990, S.307f).

Homann betont die Freude am Spiel, die das Lernen fördere (Homann, 1995, S.61), ebenso wie Niedermann und Schoch, die hinzufügen, dass die vom Spiel hervorgerufenen Emotionen auch bei mehrfachem Spielen erhalten bleiben (Niedermann et al., 2010, S.12).

Was Homann nicht explizit in seinen Thesen erwähnt, ist der Erwerb von mathematischem Wissen, mathematischen Fähigkeiten und Fertigkeiten. Dieser Erwerb würde vor allem aus These eins und sieben folgen, aber auch aus den anderen Thesen (bis auf These zwei). Niedermann und Schoch hingegen formulieren mehrere Lernchancen, die in diese Richtung gehen:

> „Mit mathematischen Lernspielen kann im Unterricht erworbenes Wissen geübt und gefestigt werden. […]
> Mit mathematischen Lernspielen können erste Geflechte zu einem Geflecht von Beziehungen und Kenntnissen ausgebaut werden. […]
> Mit mathematischen Lernspielen kann in neue Inhalte des Mathematikunterrichts der Grundschule eingeführt werden. […]
> Mit mathematischen Lernspielen können Fähigkeiten gefördert werden, die nicht spezifisch sind für bestimmte Inhalte, sondern in vielen Bereichen des Mathematikunterrichts Anwendung finden. […]“ (Niedermann et al., 2010, S. 14f)

Auch andere Autoren nennen positive Lerneffekte, die durch Lernspiele hervorgerufen werden können. Durch Lernspiele können fachliche Fähigkeiten und Fertigkeiten erreicht sowie Lernprozesse gefördert werden (Tehrani, 2009, S.42f). Die kognitiven Wirkungen von Lernspielen unterstützen die Schüler beim Erwerb von Wissen und Fähigkeiten. Käpnick erwähnt insbesondere kreatives, flexibles und strategisches Denken als kognitive Fähigkeiten, die erworben werden können. Weiterhin können Schüler Kompetenzen, die sie schon erworben haben, üben und anwenden und sie können Zusammenhänge erkennen. Auch erwähnt er die Möglichkeit, durch Lernspiele in neue Themen einzuführen (Käpnick, 2014, S.180).

Auch Heinz erwähnt die Möglichkeit, durch Lernspiele Grundlagen, Fertigkeiten und Fähigkeiten zu üben, sowie Neues zu entdecken (Heinz, 2018, S.20). Abgesehen von den Lernprozessen, die während des Spiels stattfinden, könne das Spiel auch als Ausgangspunkt weiterer Lernprozesse dienen und den Schülern Anlass dazu geben, sich auch außerhalb der Spielsituation mit mathematischen Inhalten zu beschäftigen (Tubach, 2019, S.66). Als weiteren Vorteil von Lernspielen erwähnen Niedermann und Schoch sowie Popp die Individualisierung und Differenzierung (Niedermann et al., 2010, S.16; Popp, 1990, S.306). Auf Schüler könne besser eingegangen werden. Somit können sie adäquater gefördert und Lernschwierigkeiten abgebaut werden. Insbesondere ermöglichen Lernspiele durch das Verwenden von Glückselementen die Förderung schwächerer Schüler (Käpnick, 2014, S.182). Ebenfalls wird die Selbstkontrolle der Schüler während des Spiels und die damit verbundene Schülerselbsttätigkeit als positiver Aspekt genannt (Popp, 1990, S.306; Tehrani, 2009, S.73).

Neben den Vorteilen, die sich durch den Nutzen von Lernspielen ergeben können, werden auch Kriterien aufgeführt, damit ein Lernspiel funktioniert. Dies meint hier vor allem, dass Lernziele erreicht und Schüler motiviert werden. Die Kriterien lassen sich in die Kategorien Spieldesign - sowohl inhaltlich als auch das Material betreffend -, vor dem Einsatz, während des Einsatzes und nach dem Einsatz des Spiels einordnen.

Das Spiel sollte so gestaltet sein, dass die Spielmaterialien gut zugänglich und einfach zu handhaben bzw. herzustellen sind (Käpnick, 2014, S.185; Niedermann et al., 2010, S.14). Ebenfalls sollte das Design ansprechend sein (Niedermann et al., 2010, S.14; Tehrani, 2009, S.37).

Was den inhaltlichen Teil betrifft, so sollte die Spielidee zu den Lernzielen passen und die didaktische Absicht klar ersichtlich sein (Heinz, 2018, S.19; Popp, 1990, S.307). Des Weiteren sollte das Verhältnis von Lern- und Spielwert im Gleichgewicht sein, damit weder der Spielcharakter, noch der Lerneffekt verloren geht (Popp, 1990, S.307; Tubach, 2019, S.65). An dieser Stelle sei nochmal erwähnt, dass die Wahrhaftigkeit des Spiels erhalten bleiben muss, das Spiel von den Schülern also tatsächlich auch als Spiel wahrgenommen wird (Niedermann et al., 2010, S.14).

Das Spielziel sollte den Schülern sowohl erstrebenswert als auch erreichbar erscheinen (Niedermann et al., 2010, S.14), die Spieldauer passend für den Unterricht (Käpnick, 2014, S. 185), die Aufgaben angemessen, d.h. weder zu schwierig noch zu einfach (Niedermann et al., 2010, S.13) und die Spielregeln für die Schüler verständlich, eindeutig und überschaubar sein (Käpnick, 2014, S.185; Niedermann et al., 2010, S.14).

Im Allgemeinen sollten die Schüler die Antworten während des Spiels ohne Hilfe des Lehrers selbst überprüfen können (Niedermann et al., 2010, S.13; Tehrani, 2009, S.37). Kleinere Erfolgserlebnisse sollten den Schülern während des Spiels z. B. durch Selbstkontrolle oder Zufallstreffer immer wieder ermöglicht werden (Niedermann et al., 2010, S.14). Gerade Glückselemente verhelfen schwächeren Schülern zu Erfolgserlebnissen.

Das Spiel sollte häufig wiederholt werden können und den Schülern einen gewissen Freiraum an Entscheidungsmöglichkeiten lassen, z. B. durch die Möglichkeit, die Spielregeln zu variieren (Käpnick, 2014, S.185; Niedermann et al., 2010, S.14).

Damit ein Spiel effektiv ist, muss es motivierend wirken (Niedermann et al., 2010, S.13). Niedermann und Schoch führen aber nicht aus, welche Spielkomponenten zur Steigerung der Motivation führen können. Laut Käpnick ist ein Spiel motivationsfördernd, wenn eine gleiche Gewinnchance für alle besteht und das Verlieren des Spiels keine schlimmen Konsequenzen nach sich zieht (Käpnick, 2014, S. 185). Darauf wird aber in Kapitel 4 noch genauer eingegangen.

Tubach unterscheidet zwischen dem mathematischen Potential und den mathematischen Lerngelegenheiten eines Spiels. Das mathematische Potential sind diejenigen mathematischen Aktivitäten, die durch das Lernspiel ermöglicht, jedoch nicht zwangsläufig realisiert werden. Die Lerngelegenheiten entstehen durch das mathematische Potential und den Aufforderungscharakter des Materials und der Regeln, sowie dem sozialen Aufforderungscharakter des Spiels und tragen zur Ausschöpfung des mathematischen Potentials bei (Tubach, 2019, S.64f).

Bevor ein Lernspiel zum Einsatz kommt, müssen die Voraussetzungen geschaffen werden, dass sich die Schüler auf das Spiel einlassen. Die Schüler sollten die Möglichkeit haben, sich frei zu entfalten, und der Lehrer sollte sicherstellen, dass eine Bereitschaft zum Spielen sowie eine Lernbereitschaft bestehen (Popp, 1990, S.308; Tehrani, 2009, S.56). Der Schwierigkeitsgrad und die Zeitdauer sollten so gut wie möglich an die Schüler angepasst werden (Niedermann et al., 2010, S.14). Ebenfalls muss beachtet werden, dass die Schüler mittels geeigneter Kommunikation und Kooperation fähig zu eigenständiger Partner- und Gruppenarbeit sind. Auch rein praktische Faktoren wie die richtige Sitzanordnung und Tischstellung müssen beachtet werden, um Störungen zu vermeiden (Tehrani, 2009, S.56f).

Während des Spiels ist eine pädagogische Gestaltung der Spielsituation wichtig. Das Geschehen muss übersichtlich bleiben, der Geräuschpegel darf nicht zu groß sein und

Konflikte zwischen den Schülern sollten vermieden werden (Popp, 1990, S.307). Den Schülern soll ein Freiraum gewährt werden, in dem sie keinen Leistungsdruck spüren (Niedermann et al., 2010, S.14). Die Rolle des Lehrers ist die eines Begleiter, der beobachtet, moderiert, beaufsichtigt, aber auch vermittelt, hilft und erklärt (Tehrani, 2009, S.56f; Tubach, 2019, S.65). Auch wenn die motivationale Wirkung von Lernspielen von besonderer Bedeutung ist, sollte nicht nur diese Funktion von Spielen verwendet werden, das Lernspiel also nicht nur zur Auflockerung oder etwa nur in Vertretungsstunden verwendet werden (Heinz, 2018, S.21). Sowohl beim Spieldesign als auch vor und während des Spielens sollten die individuellen Spiel- und Lernvoraussetzungen der Schüler berücksichtigt werden (Popp, 1990, S.307).

Nach dem Einsatz eines Lernspiels im Unterricht bietet es sich an, die mathematischen Ideen und Inhalte aus dem Spiel gemeinsam systematisch zu strukturieren und die mathematischen Erfahrungen der Schüler zu ordnen (Tubach, 2019, S.66). Der mathematische Inhalt wird somit aus dem Kontext des Spiels gelöst und kann nochmals vertieft und gefestigt werden.

Wir können festhalten, dass es Thesen bezüglich der Merkmale guter Lernspiele gibt, die theoretisch gut begründet sind. Empirisch bestätigen lassen sich aber nicht alle. Dies mag unter anderem daran liegen, dass manche Thesen wie etwa die Entfaltung kreativer Fähigkeiten nur sehr schwierig empirisch zu überprüfen sind. Andere Thesen können aber empirisch bestätigt werden, wie wir weiter unten und in den Kapiteln zu SG und Board Games sehen werden.

Tehrani hat zwar keine Studie durchgeführt, aber drei mathematische Lernspiele mit Schülern durchgeführt, wobei sie ihre vorherigen mathematischen Überlegungen eingebunden und ihre Beobachtungen dokumentiert hat. Bei den Lernspielen handelte es sich um Spiele für Kinder im Grundschulalter, die Aufgaben zu den Grundrechenarten, insbesondere zur Multiplikation, zu Punkt- vor Strichrechnung und zum kleinen Einmaleins enthielten. Zu Beginn formulierte Tehrani Ziele für jedes Spiel. Dabei hat sie nicht nur mathematische Fähigkeiten, sondern auch soziale bzw. kognitive Fähigkeiten wie Kooperation und Konzentration berücksichtigt.

Während des Spielens wurde eine große Beteiligung, Begeisterung und Freude seitens der Schüler beobachtet. Sie waren (intrinsisch) motiviert und zeigten große Lernbereitschaft. Die Spiele wurden mit hoher Konzentration, Aufmerksamkeit und Eifer gespielt. Dabei zeigten sie Interesse an den mathematischen Inhalten. Ebenso konnte beobachtet werden, dass sie zur Lösung der Aufgaben unterschiedliche

Strategien anwendeten und somit kreative Lernprozesse stattfanden. Die Schüler arbeiteten zusammen und schwächere Schüler wurden miteingebunden, wodurch sie von den Spielen profitierten. Eine gleichmäßige Beteiligung aller konnte dokumentiert werden. Soziales Lernen fand also durch Förderung sozialen Verhaltens wie Hilfsbereitschaft, Teamfähigkeit und Kooperation statt.

Jedoch konnte Tehrani kein Nachweis einer Leistungssteigerung erbringen, da es sich nur um reine Beobachtungen der Schüler beim Spielen ohne Pre- oder Posttest handelt. Es lässt sich aber erahnen, dass sich die Leistungen der Schüler bei mehrfachem Spielen verbessern würden, da sie intensiv und interessiert an den spielerischen Aktivitäten teilnahmen. Tehrani folgert, dass mathematische Lernspiele eine Bereicherung für den Schulunterricht darstellen und zur Ergänzung, nicht aber als Ersatz, des herkömmlichen Unterrichts verwendet werden können (Tehrani, 2009, S.62-74).

Baker und Navarro (2005) bezeichnen ihr Spiel, das Studenten helfen soll, ihre Kenntnisse in Softwaretechnik und dem Softwareprozess zu verbessern, als „educational card game". Es handelt sich um ein nicht-digitales Lernspiel. Das Spiel hat zum Ziel, die Lücke zwischen Theorie und Praxis, die sich aufgrund des geringen Praxisbezugs im Studium auftut, zu schließen. Hierfür wird der Softwareprozess im Spiel simuliert. Es handelt sich um ein kompetitives und interaktives Spiel. Baker und Navarro betonen die Bedeutung des Spaßes am Spiel. Wenn die Spieler Spaß haben, können sie, was sie im Spiel lernen, später besser erinnern. Auch heben sie die Vorteile eines physischen Kartenspiels hervor. Es ist einfach zu benutzen, das ganze Spiel ist für alle Spieler präsent und das Ergebnis einer Handlung ist unmittelbar einzusehen. Die persönliche Interaktion fördere zudem gemeinsames Lernen.

Das Feedback wurde von den Studenten schriftlich gegeben. Sie mussten auf einer Skala von eins bis fünf eintragen, wie sehr sie einer Aussage zustimmten. Die meisten gaben an, dass das Spiel Spaß machte und einfach zu spielen war. Auch bewerteten sie es in Bezug auf das Beibringen des Softwareprozesses im Allgemeinen und das Verstehen von Prozessen, die schon im Kurs unterrichtet wurden, als erfolgreich und fänden es hilfreich, wenn das Spiel in den Einführungskurs integriert würde. Für das Einführen neuer Prozesse bewerteten sie das Spiel als nicht geeignet. Ebenso gab es offene Fragen, aus deren Beantwortung nochmals hervorging, dass die Studenten Spaß hatten und den Lerneffekt bezüglich des Softwareprozesses als positiv bewerteten (Baker, Oh Navarro, & Van Der Hoek, 2005).

In ihrer Studie versuchte Young-Loveridge nachzuweisen, dass das Arbeiten mit Zahlenbüchern und -spielen die Zahlenfertigkeiten von Schülern verbessert. Die Teilnehmer waren durchschnittlich im Alter von fünf Jahren und gehörten zu den mathematisch schwächeren Kindern. Insgesamt nahmen 105 Kinder an der Studie teil, 23 von ihnen arbeiteten mit den Büchern und Spielen, 83 waren in der Kontrollgruppe. Letztere bekam zur selben Zeit Matheunterricht von ihren Lehrern. Dieser bestand aus einem speziellen Programm, das die Schüler zuerst Erfahrungen durch vergleichen, klassifizieren usw. sammeln lässt, bevor sie beginnen, mit Zahlen zu arbeiten.

Young-Loveridge konnte eine signifikant bessere Rechenleistung der Gruppe, die mit den Zahlenspielen und -büchern arbeitete, nachweisen. Die Kontrollgruppe zeigte keine signifikante Besserung. Der Unterschied zwischen den Gruppen verringerte sich zwar nach dem Programm, die Ergebnisse blieben aber für mehr als ein Jahr signifikant, was für einen langanhaltenden Lerneffekt spricht. Ob der Zugang über die Spiele oder über die Bücher effektiver war, konnte nicht herausgefunden werden (Young-Loveridge, 2004).

McConkey und McEvoy (2007) arbeiteten in ihrer Studie mit Kindern mit Lernschwierigkeiten und geistiger Behinderung. Die verwendeten Spiele enthielten Aufgaben zu Zahlenkonzepten. Die Kinder mussten von 1 bis 20 zählen, die Zahlen von null bis neun wiedererkennen oder die Mächtigkeit einer Menge bestimmen. Dabei spielten sie gemeinsam mit ihren Lehrern. Die Kontrollgruppe bearbeitete zur selben Zeit Aufgaben zu Zahlen, ebenfalls mit ihren Lehrern. Der Lernzuwachs wurde durch Aufgaben der Form „Wie viel…?“ und „Gib mir…“ getestet.

Die Kontrollgruppe wies nahezu identische Ergebnisse wie vor der Intervention auf, während in der Spielgruppe eine signifikante Verbesserung in beiden Tests bezüglich dem durchschnittlichen sowie dem höchsten und dem niedrigsten Score, nachgewiesen werden konnte. Ebenso zeigte diese Gruppe mehr Vertrauen im Umgang mit Zahlen. Wie auch in allen anderen Studien wurde ein großes Interesse seitens der Kinder an den Spielen beobachtet (McConkey & McEvoy, 2007).

Hosemann (1999) testete verschiedene Würfel-, Brett- und Kartenspiele zum Dichtebegriff in einer siebten Klasse. Es wurde versucht herauszufinden, ob die Spiele zu einem besseren Verständnis des Begriffes sowie zur Motivation der Schüler, ein tieferes Verständnis selbstständig zu erwerben, beitragen. Alle Kinder erhielten weiterhin normalen Unterricht, die Experimentalgruppe spielte zusätzlich in den Pausen.

Nach der Intervention erhielten die Schüler Fragebögen und es wurden Interviews und eine schriftliche Überprüfung des Lernzuwachses durchgeführt. Dabei konnte Hosemann keinen signifikanten Unterschied in Bezug auf das Verständnis des Dichtebegriffes feststellen. Trotzdem zeigte sich ein positiver Effekt bezüglich der Motivation für die Fächer Physik und Chemie (Hosemann, 1999).

In einer Interventionsstudie für elementare mathematische Bildung untersuchte Gasteiger (2013) die Wirkung von Würfelspielen auf die mathematische Kompetenz von Kindergartenkindern. Interessant ist, dass er dabei auch überprüfte, ob die Spiele unabhängig von Geschlecht, Migrationshintergrund, Intelligenz und der Kindertagesstätte wirkten. Die Studie verlief über einen Zeitraum von dreieinhalb Wochen. Experimental- und Kontrollgruppe unterschieden sich darin, dass die Experimentalgruppe mit Zahlenwürfeln arbeitete, während die Würfel der Kontrollgruppe mit Farben oder Symbolen versehen waren. Die mathematischen Leistungen der Kinder wurden vor und nach der Intervention erhoben. Zudem wurde die Intelligenz gemessen und die Qualität der Kindertagesstätte eingeschätzt. Die Ergebnisse lassen darauf schließen, dass die Intervention positiv auf die mathematische Kompetenzentwicklung wirkt. Es ergab sich ein hoch signifikanter Effekt bei den Schülern, die mit den Zahlenwürfeln spielten. Außerdem verbesserte sich die Experimentalgruppe unabhängig von Geschlecht, Migrationshintergrund, Intelligenz und Kindertagesstätte (Gasteiger, 2013).

Randel und Morris (1992) verfassten eine Review, in der die Literatur, die die Effektivität von Spielen und gewöhnlichem Unterricht vergleicht, dargestellt wird. Einbezogen wurden Reviews aus dem Zeitraum von 1962 bis 1984 und Studien von 1984 bis 1991. Insgesamt wurden dabei 67 Studien analysiert. Die Studien bezogen sich auf die Fächer Sozialwissenschaften, Mathematik, Sprachen, Logik, Physik oder Biologie. Geprüft wurde auch, ob der Lerneffekt über eine längere Zeitspanne hinweg beibehalten wurde und ob das Interesse der Teilnehmer durch die Spiele stieg.

38 Studien ließen keinen Unterschied zwischen den Lernspielen und herkömmlichen Unterricht erkennen, 27 Studien fielen zu Gunsten von Spielen aus und 3 Studien ziehen gewöhnlichen Unterricht vor. Es sticht heraus, dass sich der größte Anteil an Studien, die Spiele favorisierten, im Fach Mathematik finden ließ. Bei den mathematischen Spielen handelte es sich meist um Computerspiele. Sie stellten sich als sehr effektiv in Bezug auf die Verbesserung der mathematischen Leistung heraus.

Zudem zeigte der Vergleich der Studien, dass durch Simulationsspiele das Gelernte besser beibehalten wurde als durch andere Spielformen. In zwölf von 14 Studien zeigten die Schüler mehr Interesse an den Spielaktivitäten als an den Instruktionen im Unterricht. Besonders motivierende Spiele enthielten Wettbewerbs- und Fantasiekomponenten, sowie Komponenten, die die Neugierde ansprachen.

Randel und Morris treffen mehrere Schlussfolgerungen. Zum einen halten sie fest, dass es vom Fach abhängt, ob Spiele genutzt werden sollten. In Fächern, in denen der Inhalt detaillierter fokussiert werden kann, wird ein positiver Lerneffekt durch Spiele mit größerer Wahrscheinlichkeit erzielt. Großteils wurden positive Ergebnisse in Bezug auf das langfristige Bestehen des Lerneffekts gefunden. Randel und Morris führen dies sowie die bessere Aufnahme des Stoffes auf die aktive Teilnahme an den Spielen zurück. Weiterhin wurde über alle Studien hinweg bestätigt, dass die Schüler sie als interessanter empfanden. Somit können Lernspiele insbesondere in Klassen mit Motivationsproblemen von Vorteil sein.

Randel und Morris weisen darauf hin, dass es verschiedene Variablen gibt, die die Ergebnisse beeinflussen können. Dazu zählen unter anderem die Persönlichkeit der Teilnehmer, das Geschlecht sowie akademische und spielerische Fähigkeiten. So bevorzugten zum Beispiel Grundschulkinder Spiele, die klare Ziele, Computer Scoring, Audioeffekte und ein gewisses Maß an Unvorhersehbarkeit aufweisen, sowie Spiele in den die Schnelligkeit der Antwort zählte. Randel und Morris fordern dazu auf in weiteren Studien diejenigen Spielkomponenten zu identifizieren, die zu einem positiven Lerneffekt führen. (Randel, Morris, Douglas Wetzel, & Whitehall, 1992).

Insgesamt lässt sich in der Literatur ein Fokus auf frühkindliche mathematische Bildung, also im Bereich Kindergarten und Grundschule, sowohl in der theoretischen als auch empirischen Literatur erkennen. Nur die Studie von Hosemann und die von Baker und Navarro richtet sich an etwas ältere Schüler bzw. Studenten. Die Lernspiele zielen meist auf die Förderung einer bestimmten mathematischen Fähigkeit und des Interesses bzw. der Motivation für die Themen ab. Soziale Fähigkeiten wie Kooperation und Teamfähigkeit werden vor allem in den empirischen Studien nur selten betrachtet. Sie werden eher in den theoretischen Analysen von Lernspielen berücksichtigt. Hier lassen sich zum Teil auch andere Aspekte und Lernchancen von Spielen, wie die Einstellung zur Mathematik, Fähigkeiten wie Kreativität oder abstrakte mathematische Fähigkeiten wie strukturiertes Denken, finden. In diesen Bereichen besteht also noch Forschungsbedarf. Es zeichnet sich sowohl in der Theorie als auch in den Studien ab, dass Lernspiele den Lerneffekt meist positiv beeinflussen und vor allem für das Fach Mathematik geeignet sind. Weiterhin zeigt sich die große Bedeutung der Freude und des Spaßes am Spiel und somit der Motivation und des Interesses, das sich in allen Studien zeigt, selbst wenn kein Lernzuwachs nachgewiesen werden konnte. Auch in der theoretischen Literatur wird die Bedeutung von Freude und Spaß immer wieder hervorgehoben.

3.2.2. Serious Games

Im Bereich SG finden sich viele Reviews, Meta-Analysen und Überblicksartikel. Im Folgenden wird versucht die wichtigsten Punkte aus diesen Artikeln zusammenzufassen. Des Weiteren werden zwei Studien und zwei Rahmenmodelle, die zur Unterstützung der Entwicklung von SG entwickelt wurden, vorgestellt.

Girard und Ecalle (2013) betrachteten in ihrer Meta-Analyse insgesamt elf Studien im Zeitraum von 2007 bis 2011. Ihr Ziel war es, SG und Videospiele, die nicht unbedingt ein Lernziel verfolgen, und deren Effektivität auf den Lernerfolg und das *Engagement* der Spieler zu vergleichen. Von den elf Studien untersuchten sechs SG und fünf Videospiele in unterschiedlichen Bereichen wie Schulbildung, Medizin, Psychologie oder Ingenieurswissenschaften auf ihre Effektivität im Hinblick auf Lernerfolg und *Engagement*. Bei allen Spielen handelte es sich um digitale Spiele.

Ein positiver Effekt auf den Lernerfolg konnte bei drei Spielen (zwei SG, ein Videospiel) nachgewiesen werden, wobei die Kontrollgruppe andere Übungsformen oder keine zusätzliche Lernzeit erhielt. Sieben Spiele konnten keinen signifikanten Effekt aufweisen. Anhand der analysierten Studien lassen sich also keine Folgerungen bezüglich der Effektivität des Lernerfolgs von SG oder von Videospielen ziehen.

Im Hinblick auf *Engagement* und Motivation wirkten zwei von drei SG motivierender auf die Teilnehmer als die konventionellen Lehrmethoden. Die Teilnehmer zeigten sich bereitwillig, mehr Zeit mit SG und Videospielen zu verbringen, was vor allem auf den Spaß am Spiel zurückzuführen war. Jedoch ist hier aufgrund der wenigen Daten keine Verallgemeinerung möglich.

Girard und Ecalle führten einige Hinweise für die effektive Wirkung von SG auf den Lernprozess auf. Laut ihnen gibt es eine Kausalbeziehung zwischen *Engagement*, Motivation und Leistung, denn kognitives *Engagement* ist verbunden mit affektivem *Engagement* und Motivation, weshalb letztere die Lerneffektivität beeinflussen. Ebenso führen *Engagement* und Motivation zu längerem Spielen und somit dazu, dass sich die

Spieler länger mit den Inhalten auseinandersetzen und Fortschritte erzielen. SG fördern durch den Wunsch nach Herausforderungen und Neugierde die intrinsische Motivation, was wiederum zu mehr *Engagement* im Lernprozess führt. Auch erwähnen Girard und Ecalle, wie im vorigen Kapitel beschrieben, den Mittelweg, der zwischen Spiel- und Lernelementen gefunden werden muss, sowie die *Flow*-Theorie, die im vierten Kapitel ausführlich erörtert wird (Girard et al., 2013). Diese besagt, dass ein Individuum beim Bearbeiten einer Aufgabe, einen Zustand der völligen Eingenommenheit (*Flow*-Zustand) erreichen kann, wenn die Herausforderung optimal, d.h. weder zu leicht noch zu schwer ist (Nakamura & Csikszentmihalyi, 2014, S.90).

Wie schon in der Einleitung erwähnt wird, haben der Spiel- und Lernprozess gemeinsame Eigenschaften mit dem Unterschied, dass der Spielprozess im Gegensatz zum Lernprozess im Allgemeinen als angenehm und freudvoll empfunden wird. Um sich diesen Vorteil des Spiels zunutze zu machen, muss herausgefunden werden, warum Spiele Spaß machen und motivieren. Literatur dazu wird in Kapitel 4 dargestellt.

Verknüpft man beide Prozesse, so sollte man laut Breuer und Bente (2010) darauf achten, dass das Lernen nicht als etwas Externes wahrgenommen wird, sondern im Spielprozess „versteckt“ integriert ist. Als weiteren Punkt erwähnen sie das Interesse und die Neugierde, die durch Spiele erzeugt werden können. Aufgrund dessen schlagen sie vor, Links zu Webseiten oder Wikipedia-Artikeln in das Spiel zu integrieren. Dies sei eine Option für die Spieler, sich ohne Zwang über das Spiel hinaus über die Themen zu informieren und stelle somit ein selbstgesteuertes und aktives Lernen dar.

Breuer und Bente sehen also hauptsächlich die Motivation für und das Interesse an den Inhalten des Spiels für den Lerneffekt verantwortlich und bewerten Spiele somit als effektive Lernmethode. Somit folgern sie, dass die Bedeutung von Spaß und Freude in der Bildung immer berücksichtigt werden und insbesondere im Hinblick auf SG immer die Frage nach ihrem Unterhaltungswert gestellt werden sollte. Sie weisen auch darauf hin, dass bei der Frage nach Effektivität von SG immer die Abhängigkeit der Ergebnisse von Faktoren wie des Settings oder der Zielgruppe beachtet werden müssen. Ebenso plädieren sie für die Entwicklung von Bewertungsmethoden für digitales spielbasiertes Lernen (Breuer & Bente, 2010).

Boyle und Hainey (2016) erstellten eine systematische Review, um einen Überblick über die bisherige empirische Evidenz für die Effektivität von Computerspielen, die nicht unbedingt ein Lernziel verfolgen, und SG zu schaffen. Dabei untersuchten sie 143 Artikel, die sie hinsichtlich verschiedener Kriterien kategorisierten. Zum einen berücksichtigten sie, welches Forschungsdesign in der Studie verwendet wurde, also ob es sich um eine randomisierte kontrollierte Studie, ein Quasi-Experiment, eine Befragung oder um eine qualitative Studie handelt. Auch hinsichtlich der Spielvariablen wurden die Paper kategorisiert: handelt es sich um ein digitales oder nicht-digitales Spiel, was ist die Zielsetzung des Spiels (rein zur Unterhaltung oder mit Lernzielen), um welches Spielgenre handelt es sich, auf welcher Plattform wird es gespielt und welches Thema ist Gegenstand des Spiels. Weiterhin wurde miteinbezogen, ob die Studie Spiele im Allgemeinen oder ein spezielles Spiel betrachtete und auf welche Lernergebnisse hin überprüft wurde. Handelte es sich um reinen Wissenserwerb oder um motivationale und affektive Fähigkeiten, um kognitive Fähigkeiten, um Verhaltensänderungen oder um physiologische und soziale Fähigkeiten.

Die ausgewählten Studien beinhalteten nur ein Brettspiel, die restlichen Spiele waren alle digital. Auffällig ist, dass die häufigsten Themen im Bereich von MINT-Fächern und Gesundheit zu finden waren. Insgesamt wurden sehr viele Studien gefunden, die über positive Ergebnisse hinsichtlich verschiedener Lernergebnissen von Spielen berichteten. Das Resultat, das am häufigsten für Spiele, die zum Lernerwerb gedacht sind, berichtet wurde, war der Wissenserwerb. Bei Unterhaltungsspielen ließen sich auch Resultate bezüglich der affektiven Fähigkeiten, Verhaltensänderungen, der Wahrnehmung, Kognition[3] und Physiologie finden.

Für den Wissenserwerb konnten hauptsächlich positive Ergebnisse nachgewiesen werden, wenn es sich um eine randomisierte kontrollierte Studie handelte, was auf eine Abhängigkeit der Ergebnisse vom Studiendesign schließen lässt. Hinsichtlich der Wahrnehmung konnte beobachtet werden, dass die Aufmerksamkeit der Spieler stieg. Resultate in Bezug auf Kognition scheinen im Allgemeinen schwieriger nachzuweisen. Eine Studie konnte zeigen, dass die Problemlösefähigkeit der Spieler in den Bereichen „Gründe und Lösungen finden“ sowie „Probleme vermeiden“ gefördert wurde. Viele Ergebnisse konnten die *Flow*-Theorie (siehe Kapitel 4) untermauern. Die Spieler empfanden größere Erregung und ein intensiveres Präsenzgefühl. Sie nahmen die Situation bewusst wahr und handelten schneller.

Motivationale Komponenten, Aufmerksamkeit, Bedeutsamkeit und Vertrauen stellten verlässliche Prädiktoren für die Zufriedenheit mit einem Spiel dar und können somit als Motive für das Spielen angenommen werden. Anreize, die im Spiel geschaffen werden, die

[3] Kognition ist ein „Sammelbegriff für bewusste und unbewusste mentale Prozesse, die von Wahrnehmung bis Denken reichen“ (Wirtz & Strohmer, 2014, S.886).

Spielbeteiligung und die Spielstruktur konnten die motivationale und kognitive Verarbeitung der Inhalte sowie die Zufriedenheit mit dem Spiel vorhersagen.

Im Bereich der sozialen Fähigkeiten wurden die Fähigkeit der Spieler, ihre Emotionen zu kommunizieren, ihre Empathie und ihr Interesse an anderen Kulturen gefördert. Weiterhin konnte beobachtet werden, dass Schüler, die Spiele selbst erstellten, einen größeren Lerneffekt erzielten, als diejenigen, die die Spiele nur spielten und außerhalb des Unterrichts doppelt so viel Zeit mit der Erstellung des Spiels verbrachten. Boyle et al. betonen, dass Variablen wie Spielcharakteristika, Spielkomponenten und der Kontext die Ergebnisse beeinflussen können.

Sie halten fest, dass Fortschritte dabei gemacht wurden, diejenigen Spielkomponenten zu identifizieren, die die Motivation steigern und das Lernen unterstützen. Dazu zählen der Wettbewerbscharakter, eine gewisse Unsicherheit der Informationen und das Variieren der Übungspläne, wobei der positive Effekt des Wettbewerbs umstritten ist. Trotz dieser Fortschritte raten Boyle et al. dazu, in weiteren Studien diejenigen Spielkomponenten zu identifizieren, die am effektivsten sind, um die Motivation und den Lernprozess zu fördern (Boyle et al., 2016).

Giessen (2015) verweist auf die bisher dürftigen Ergebnisse hinsichtlich des Lerneffekts von Lernspielen (Giessen, 2015, S.2241), ebenso wie Susi und Johannesson (Susi et al., 2007, S.8). Den Grund dafür sieht er in der Schwierigkeit, allgemeine Folgerungen zu treffen, die er auf die Varietät der Spiele, ihrer Themen, Inhalte, Struktur und ihres Designs zurückführt.

Als wichtiges Kriterium für einen positiven Lerneffekt sieht er die Balance zwischen den spielerischen Elementen und den didaktischen oder pädagogischen Zielen. Er gibt einen kurzen Überblick über die Erkenntnisse bisheriger Studien. So hängt der Erfolg von SG vom Kontext und Inhalt und von der pädagogischen Kompetenz des Lehrers ab. Bessere Ergebnisse wurden für das abstrakte Denken und für affektive Fähigkeiten gefunden, während die Ergebnisse auf den Erwerb von Faktenwissen oder Sprachkenntnissen schwächere Effekte aufwiesen, was im Widerspruch zur obigen Review von Boyle et al. steht, die bezüglich des Wissenserwerbs von positiven Ergebnissen berichteten. Weiterhin spielt die Aktivierung des Spielers und somit ein aktiver Erwerb von Lerninhalten eine bedeutende Rolle für den Lernerfolg.

Die meisten Studien, die analysiert wurden, zeigten keinen Unterschied der Ergebnisse zwischen der Spiel- und der Kontrollgruppe, die herkömmlichen Unterricht erhielt, und stuften den Inhalt und das Thema als wichtige Faktoren ein. Giessen schließt daraus, dass

Lernen mit digitalen Spielen eine geeignete Vorbereitung und weiterführende Aktivitäten braucht, um erfolgreich zu sein. Eine Steigerung der Motivation und des Interesses konnte aber auch in diesen Studien gezeigt werden. Für eine adäquate Einbindung von Spielen in die Lernumgebung schlägt Giessen Maßnahmen für den externen sowie internen Support vor. Es sollten eine positive Spielumgebung und eine gut strukturierte kooperative Spielsituation geschaffen werden. Feedback sollte auf detaillierte Weise gegeben und der Lerninhalt auf verschiedene Arten präsentiert werden (Giessen, 2015).

Die Review von Lämsä und Hämäläinen (2018) umfasst zwanzig Studien, die das Spieldesign von Lernspielen zur Unterstützung von Menschen mit Lernschwierigkeiten untersuchten. Themen der Spiele sind grundlegende leserische und mathematische Fähigkeiten. Die Autoren orienterieren sich an drei Fragen:

> „What are the major characteristics and learning outcomes of the studies on serious games for enhancing basic reading and maths skills?
> What kinds of key design principles can be identified in research that uses games for enhancing reading and maths skills?
> What kind of gamification elements are used to promote learning by people with learning difficulties?" (Lämsä et al., 2018, S.599)

Als Antwort auf die erste Frage konnten sie sechs Spiele finden, die die Leistung im Rechnen verbessern sollten und in fünf Studien konnten auch Verbesserungen der geübten sowie allgemeiner mathematischer Fähigkeiten der Testgruppe nachgewiesen werden, während sich die Kontrollgruppe nicht verbesserte. Lämsä und Hämäläinen nennen vor allem die (inhaltsbasierte) Anpassungsfähigkeit und ein individualisiertes Feedbacksystem als Hauptmerkmale, die das Lernen im Spiel unterstützen. Die Veränderbarkeit bzw. Anpassungsfähigkeit ermöglicht eine größere Variation an Spielmöglichkeiten und insbesondere eine inhaltsbasierte Anpassungsfähigkeit kann die Herausforderung im Spiel optimieren, was wiederum zum optimalen *Flow* der Spieler führt. Zudem geben beide Merkmale Gelegenheit für individuelles Lernen. Zeitdruck kann als Ansporn dienen und mehr Nachdruck auf die motorischen Fähigkeiten sowie die Reaktionszeiten legen. Durch Kontextfaktoren wie Fantasie und audiovisuelle Aspekte werden die Spieler mehr ins Spiel eingebunden und ihre Aufmerksamkeit gelenkt.

Lämsä und Hämäläinen schließen daraus, dass farbenfrohe Settings und lustige Charaktere ansprechende und motivierende Elemente sein können. Ebenso werden ein sofortiges Feedback und ein Punktesystem als motivierende Merkmale genannt. Zusammenfassend konnten in zehn Studien positive Effekte auf kognitive Fähigkeiten nachgewiesen werden und Menschen mit Lernschwierigkeiten zeigten Verbesserungen in der Lernqualität.

Kritisiert wird, dass adaptier- und veränderbare Elemente, um individuell auf die Spieler einzugehen, zu wenig verwendet werden (Lämsä et al., 2018).

Ninaus und Pereira (2015) untersuchten in einer Studie drei spezifische Spielelemente (Fortschrittsbalken, Niveauanzeige, thematischer Rahmen), die sie in eine Aufgabe zum Arbeitsgedächtnis integrierten. Ihr Ziel war es, den Einfluss dieser Elemente auf die kognitive Leistung sowie auf den *Flow* der Spieler zu analysieren. Als Kontrolle diente ein gewöhnliches Format der Aufgabe ohne Spielelemente. Die Spielgruppe erzielte einen signifikant höheren Score als die Kontrollgruppe. Beide Gruppen erreichten dasselbe Level. Auch gab es keinen signifikanten Unterschied in Bezug auf den wahrgenommenen *Flow*. Eine mögliche Begründung hierfür liegt darin, dass der *Flow* aus der optimalen Herausforderung der Aufgaben hervorgeht und nicht aus den spielerischen Elementen. Trotzdem kann festgehalten werden, dass die Implementierung spezifischer Spielelemente die kognitive Leistung der Spieler verbessert. Welches einzelne Element für diese Verbesserung verantwortlich ist bleibt aber unklar, ebenso wie die Frage, ob der Effekt über einen längeren Zeitraum erhalten bleibt (Ninaus et al., 2015).

In einer weiteren Studie versuchen Ninaus und Kiili (2017) herauszufinden, ob SG nicht nur ein Mittel sind, um die Leistung der Spieler im Rechnen zu verbessern, sondern auch um die rechnerische Leistung der Spieler einzuschätzen und zu bewerten. Die Schüler mussten dabei Aufgaben lösen, in denen sie Brüche vergleichen und schätzen mussten. Die Leistung im Spiel korrelierte signifikant mit den Noten der Schüler, also mit ihrer allgemeinen mathematischen Leistung. Ebenso konnten grundlegende Ergebnisse aus Untersuchungen über das Verständnis von Brüchen, wie der numerical distance effect, reproduziert werden. Die Leistung der Schüler im Spiel gibt also Auskunft über ihr Verständnis von Brüchen, womit der spielbasierte Zugang als Einschätzungs- und Bewertungsmethode verwendet werden kann. Lehrer und Erzieher können durch das Spiel Informationen für die individuelle Unterstützung erhalten. Ein weiterer Vorteil dieses Zugangs ist die angstfreie Spielumgebung, in der kein Druck herrscht (Ninaus et al., 2017).

Mit Hilfe von Rahmenmodellen für die Entwicklung von SG können Rückschlüsse auf Spielelemente gezogen werden, die effektiv sind.

Echeverría und García-Campo (2011) entwickelten ein Rahmenmodell, anhand dessen sie ein Spiel entwickelten und testeten. Sie unterteilen SG in eine Lern- und eine Spieldimension. In der Lerndimension werden die Lernziele der Aktivität festgehalten und Kriterien für eine erfolgreiche pädagogische Integration der Aktivität in die Klasse gesucht.

Die Lernziele sollen durch motivierende und herausfordernde Aktivitäten erfüllt werden, die den Spielern Freude bringen.

Zentral ist in der Spieldimension also die Frage nach denjenigen Spielelementen, die zu dieser Erfahrung führen. Die Hauptkategorien des Designs der Spieldimension unterteilen Echeverría und García-Campo in die Spielmechanismen, die Story, die Ästhetik und die Technologie. Die Spielmechanismen umfassen alle Verfahren und Regeln des Spiels und legen fest, wie das Spielziel erreicht werden kann. Die Story schildert alle Ereignisse, die sich im Spielverlauf entwickeln. Sie kann sehr einfach sein und nur wenig erzählerische Elemente enthalten, aber auch komplex und abstrakt. Zur Ästhetik des Spiels gehören die Grafik, das Design, die Farben, die Musik und die Soundeffekte. Alle Materialien und Interaktionen, die das Spielen ermöglichen, bilden die Kategorie der Technologie.

Um die Lernziele zu kategorisieren, orientierten sich Echeverría und García-Campo an den Taxonomiestufen von Bloom (Bloom, Engelhart, & Füner, 1973). Das Lernziel Wissen unterteilt sich in Faktenwissen, konzeptuelles Wissen, Prozesswissen und metakognitives Wissen. Kognitive Prozesse lassen sich in erinnern, verstehen, anwenden, analysieren, evaluieren und kreieren unterteilen.

Lernziele sind mit den Spielmechanismen verbunden, weshalb Charakteristika der Mechanismen festgehalten werden sollten, die es den Spielern ermöglichen, die Lernziele zu erreichen. In Kapitel 3.4 wird dies am Beispiel von Ganita genauer ausgeführt.

Des Weiteren orientierten sich Echeverría und García-Campo an einem pädagogischen Modell, das das Teamwork fördert. Die Spieler haben ein gemeinsames Ziel und müssen durch diskutieren Strategien finden und sich einigen. Mit diesem Modell wollen sie sicherstellen, dass eine kooperative Umgebung geschaffen wird und alle Schüler aktiv am Spiel teilnehmen.

Mit Hilfe des Rahmenmodells wurde ein SG entwickelt, das Schülern die Grundlagen der Elektrostatik beibringen sollte. Das Spiel wurde im Unterricht angewandt und dient der Validierung des Rahmenmodells. In der Studie ließ sich ein signifikant höherer Durchschnitt richtiger Antworten nachweisen.

Echeverría und García-Campo folgern, dass das Rahmenmodell sinnvoll für die Entwicklung von SG und die Erreichung der Lernziele ist. Zudem konnten sie keinen Zusammenhang zwischen dem Geschlecht, dem vorherigem Computergebrauch oder den Spielgewohnheiten der Spieler und der erbrachten Leistung erkennen. Eine hohe Motivation der Spieler während der gesamten Spielzeit und eine positive Interaktion zwischen den Spielgruppen konnte anhand von Videoaufnahmen beobachtet werden.

Als weitere Kriterien, die dem Lernprozess zu Gute kommen können werden ein sofortiges Feedback und die Förderung des entdeckenden Lernens genannt. Zudem sollte der Transfer von Konzepten von der Theorie in die Praxis erleichtert werden und es sollte den Spielern ermöglicht werden, sich individuell zu steigern. Außerdem sollten Fehler keine schlimmen Konsequenzen nach sich ziehen.

Damit das Spiel erfolgreich in den pädagogischen Prozess des Unterrichts integriert werden kann, sollte es die Möglichkeit geben, alle Schüler miteinzubeziehen, die Spieldauer anzupassen und der Lehrer sollte die Möglichkeit haben, das Spiel zu kontrollieren (Echeverría et al., 2011).

Roungas (2016) schlägt ebenfalls ein Rahmenmodell für die Entwicklung von „educational games", die er zu SG zählt, vor. Sein Ziel war es ein Konzept zu entwickeln, auf dessen Basis eine webbasierte Umgebung kreiert werden kann, die bei der Entwicklung eines Game Design Document[4] hilft. Zuerst entwickelte er mittels Literaturrecherche ein Konzept. Danach wurden die Hauptbestandteile der webbasierten Umgebung beschrieben und zum Schluss wurden acht SG-Experten zu befragt, um die Umgebung qualitativ zu bewerten.

Roungas identifizierte in der Literaturrecherche einige Faktoren, die das Lernen beeinflussen. Zum einen die Bereitschaft zum Lernen. Diese wird vom Alter, Vorwissen, Talent und Willen des Lerners beeinflusst. Auch spielt die Motivation solange eine Rolle, bis sich der Lerner selbst motivieren kann. Die Effektivität der Motivation wird vom Nutzen, vom Umfeld des Lerners, von der Art der Motivation (intrinsisch oder extrinsisch) und von der Lerndauer beeinflusst. Wiederholen und Üben von Aufgaben beeinflussen den Lernprozess. Die Effektivität wird hier von der Häufigkeit der Wiederholungen, der Intention (wird eine Aufgabe aufgrund einer Bestrafung wiederholt oder aus freien Stücken mit dem Ziel zu lernen) und des Inhalts (ist dieser bei der Wiederholung identisch oder verändert) beeinflusst. Nach Pavlo fördert der Stimulus, der von einer Reaktion begleitet wird, den Lerneffekt. Dessen Effektivität wird durch die Art des Stimulus, seine Dauer, Intensität und Klarheit beeinflusst. Belohnung und Bestrafung des Lerners wirken sich ebenfalls auf den Lernprozess aus. Durch den Vorgang des Belohnens wird der Lernprozess mit etwas Positivem und Angenehmem verbunden. Das Alter des Lerners, die Art, Zeit und Häufigkeit der Belohnung oder Bestrafung haben Einfluss auf deren Effektivität.

[4] Das Game Design Document ist ein „instructional manual on how to build your game [..]. A design document is written for the development team, instructing them how to piece together and structure the game" (Oxland, 2004, S.240).

Die Kernelemente eines Spiels bestehen laut ihm aus den Regeln, den Zielen, der Hausforderung, des Feedbacks und des Levels. Es wird die Bedeutung der Ziele als Motivation für die Spieler betont und als notwendiges Mittel, um die eigene Leistung einzuschätzen. In Bezug auf die Herausforderung verweist Roungas auf den *Flow*, der durch ein Gleichgewicht zwischen Können und Herausforderung entsteht. Das Feedback sollte eindeutig sein und zum richtigen Zeitpunkt gegeben werden. Es wurden also die Kernelemente der Unterhaltung, des Spiels und des Lernens identifiziert. Das Rahmenmodell wurde durch die allgemein positive Rückmeldung der SG-Experten validiert (Roungas, 2016).

Auch wenn sich die Rahmenmodelle nur auf digitale Spiele beziehen, können sie auf nicht-digitale Spiele übertragen werden. Sie stellen eine gute Grundlage für die Entwicklung von Lernspielen dar, können aber auch im Nachhinein verwendet werden, um zu überprüfen, ob verschiedene Mechanismen zum Erreichen von Lernzielen in einem Spiel vorkommen.

Im Allgemeinen scheint kein Konsens über die Ergebnisse der bisherigen Forschung zu herrschen. Während manche Autoren von wenig aussagekräftigen Ergebnissen sowie dem Fehlen empirischer Evidenz berichten (Giessen, 2015; Susi et al., 2007), finden andere überwiegend positive Ergebnisse (Boyle et al., 2016; Lämsä et al., 2018). Für letztere spricht ihre systematische Herangehensweise in Bezug auf die Auswahl sowie Kategorisierung der Studien, die analysiert wurden.

Probleme, die bei der Verlässlichkeit der Ergebnisse auftreten können, sind eine nicht adäquate oder gar keine (Echeverría et al., 2011) Kontrollgruppe sowie externe Faktoren, die den Lernerfolg oder das Ergebnis der Studie beeinflussen können. In mehreren Studien hatten die Kontrollgruppen keinen zusätzlichen Mathematikunterricht, weswegen die besseren Ergebnisse der Experimentalgruppe der zusätzlichen Zeit, die diese mit den Themen verbracht hat, geschuldet sein könnten (Girard et al., 2013; Hosemann, 1999; Randel et al., 1992). Was die betrachteten Lernergebnisse betrifft, kann fast überall ein Fokus auf den Wissenserwerb und auf kognitive Fähigkeiten festgestellt werden (Boyle et al., 2016; Echeverría et al., 2011; Lämsä et al., 2018). Nur in wenigen Studien werden z. B. soziale Fähigkeiten oder Verhaltensänderungen untersucht, weswegen das Potential von Lernspielen nicht ausgeschöpft wird (Boyle et al., 2016; Lämsä et al., 2018). Trotz der vielen Uneinigkeiten kommen alle Autoren in der Bedeutung der Motivation und des *Engagements* für den Lernerfolg überein. Weitere Punkte, die oft erwähnt werden, sind die *Flow*-Theorie und das Gleichgewicht zwischen Spiel und Lernen durch ein adäquates Maß an Spiel- und Lernelementen. Auch sind sich die meisten Autoren darin einig, dass es weiterer Forschung bedarf, um diejenigen Spielelemente, die den Lernprozess fördern, zu identifizieren. Es reicht nicht aus nachzuweisen, dass durch ein Spiel ein bestimmter Lernerfolg erzielt wird. Es sollte auch im Hinblick auf die Entwicklung weiterer Lernspiele oder SG geklärt werden, welche Spielelemente sowie innere und äußere Faktoren den Lernerfolg wesentlich beeinflussen.

3.2.3. Board Games

Ramani und Siegler (2008) führten eine Studie zu einem Brettspiel mit Vorschülern im Durchschnittsalter von 5,4 Jahren aus einkommensschwachen Familien durch. Sie betrachteten diese Bevölkerungsgruppe, da die numerische Leistung von Vorschülern und Kindergartenkindern vom sozioökonomischen Status abhängt. Die Testgruppe spielte das Spiel mit Zahlen, während in der Kontrollgruppe die Zahlen durch Farbsymbole ersetzt wurden. Das Spiel wurde mehrmals in einem Zeitraum von zwei Wochen gespielt. Die Schüler spielten jeweils allein mit einem Erwachsene in einem Extraraum. Die Leistung hinsichtlich des Zahlenverständnisses der beiden Gruppen wurde durch Aufgaben zum Größenvergleich von Zahlwerten, Zählen, Zahlen erkennen und Zahlen auf einer Zahlengeraden einordnen überprüft.

Die Leistung der Testgruppe verbesserte sich nach dem Spielen in allen vier Aufgabentypen, während bei der Kontrollgruppe keine Verbesserung zu erkennen war. Die positiven Ergebnisse hielten noch neun Wochen nach der Intervention an. Das Alter der Teilnehmer und das numerische Wissen hatten keine Auswirkung auf die Menge des Gelernten, d.h. Kinder mit unterschiedlichem numerischen Wissen lernten gleich viel. Um die Effektivität des Spiels zu begründen wird unter anderem auf „Embodied Cognition“ verwiesen, was in Kapitel 3.3 näher beschrieben wird. Zudem konnten Ramani und Siegler zeigen, dass die Vorerfahrung mit Brettspielen mit Zahlen und das Zahlenverständnis positiv korrelierten (Ramani and Siegler 2008).

In einer weiteren Studie versuchten Ramani und Siegler die Anwendung des Brettspiels zu erweitern. Sie untersuchten ob die Effektivität bei Anwendung des Spiels in der Unterrichtspraxis und in kleinen Gruppen mit einem Paraprofessional[5] erhalten bleibt. Außerdem wurde ein möglicher Zusammenhang zwischen der sozialen Interaktion während des Spiels und den Lernergebnissen untersucht. Bei den Teilnehmern handelte es sich wieder

[5] Ein Paraprofessional ist “a person who is not fully qualified in a profession, but who helps qualified professionals with their work” (Brookes et al., 2014, S.1440).

um weniger privilegierte Kinder. Getestet wurde die numerische Leistung wieder anhand der vier weiter oben beschriebenen Aufgabentypen.

Auch in dieser Studie konnte eine Verbesserung der Leistung in allen Aufgaben nachgewiesen werden. Ramani und Siegler schließen daraus, dass das Brettspiel im Unterricht und in kleinen Gruppen ebenso effektiv ist. Auch die Paraprofessionals trugen einen Teil zum Lernprozess bei, indem sie ihre Unterstützung individuell an die Kinder und ihre Fortschritte anpassten. Die Motivation der Kinder zu spielen blieb über mehrere Sitzungen hinweg erhalten (Ramani, Siegler et al. 2012).

In der Reihe Crabs & Turtles wurden drei Brettspiele in Lebensgröße getestet. Alle drei sollen acht- bis neunjährige Grundschulkinder in *Computational Thinking* einführen und ihnen die grundlegenden Konzepte des Programmierens beibringen. Dafür wurden Konzepte ausgewählt, die unabhängig von einer bestimmten Programmierumgebung oder -sprache vermittelt werden können. Die Lernziele umfassen sowohl Programmier- als auch mathematische Fähigkeiten. In einer ersten Phase nahmen Studenten teil. Ihre Erfahrung wurde quantitativ analysiert und sie gaben qualitatives Feedback.

Die Rückmeldungen waren überwiegend positiv. Die Spiele hatten eine positive Wirkung auf die Teilnehmer und sie empfanden keine negativen Emotionen. Sie gaben an, dass sie das Spiel nochmal spielen und es Freunden weiterempfehlen würden. In der zweiten Phase wurde das Spiel von Gamification-Experten und Lehrern gespielt und eingeschätzt. Auch hier gaben die Teilnehmer positives Feedback. Zudem wurden die Designelemente als positiv bewertet. Jedoch empfanden sie nur bei einem Spiel einen *Flow*, was vermutlich mit dem zu geringen Schwierigkeitsgrad der anderen beiden Spiele zusammenhängt. Die Herausforderung wurde bei diesen auch als sehr gering bewertet.

Tsarava und Moeller betonen die Motivation und die Interaktion mit der Lernumgebung, die durch einen spielbasierten Zugang ermöglicht werden. Die Entscheidung für ein lebensgroßes Spielbrett begründen sie damit, dass dadurch eine aktive Teilnahme und das *Engagement* der Spieler gefördert wird, was wiederum die Motivation für ein aktives Lernen steigert. Im Sinne des Embodiments gehen sie davon aus, dass die Lernergebnisse durch die physische Erfahrung verbessert werden (Tsarava, Moeller et al. 2018).

Auch Berland und Lee (2011) versuchten herauszufinden, ob im Kontext des strategischen Brettspiels Pandemic *Computational Thinking* stattfindet. Es handelt es sich um ein kooperatives Spiel. Die Spieler haben ein Ziel, auf das sie gemeinsam hinarbeiten müssen. Das Spiel wurde in drei Gruppen mit jeweils drei bis vier Spielern im Studentenalter gespielt.

Dabei wurden sie per Video aufgenommen. Der Fokus lag dabei auf dem komplexen logischen Denken, das sich während des Spiels äußert.

Es konnte beobachtet werden, dass die Spieler globale Regeln und Strategien entwickelten, um das Spiel zu leiten. Zudem arbeiteten sie als Team zusammen, indem sie Regeln gemeinsam entwickelten und sich gegenseitig halfen. Die Spieler waren gezwungen, die Regeln zu verinnerlichen und im Rahmen dieser Regeln Strategien für ein optimales Vorgehen zu entwickeln. Berland und Lee schließen darauf, dass komplexes Computational Thinking während des Spielens stattfand. Zudem betonen sie, dass das Potential von Spielen nicht auf digitale Spiele beschränkt ist und auch in einem nicht computerbasierten Spiel entfaltet werden kann (Berland and Lee 2011).

Die in diesem Kapitel dargestellten Studien liefern durch die vielversprechenden Ergebnisse überzeugende Argumente für die Integration nicht-digitaler Brettspiele in den (Mathematik)Unterricht. Aber auch in diesen Studien liegt der Fokus der Lernziele wieder auf kognitiven Fähigkeiten und der Motivation, die durch das Spielen gesteigert wird. Auf die positiven Aspekte kooperativer Spiele verweisen Ramani und Siegler in ihrer zweiten Studie und Berland und Lee. Ramani und Siegler und Tsarava und Moeller beziehen sich auf die Theorie des Emobidment als Vorteil nicht-digitaler Spiele gegenüber digitalen Spielen.

3.3. Embodiment

Viele Autoren nicht-digitaler Spiele heben vor allem die physischen Aspekte der Spiele als förderlich für den Lernprozess hervor. So beschreiben Baker und Navarro, dass ihr physisches Kartenspiel den Vorteil habe, dass das gesamte Spiel übersichtlich vor den Spielern auf dem Tisch liegt und die Spieler die Folgen einer Handlung sofort erkennen. Außerdem fördere die direkte Interaktion das kooperative Lernen (Baker et al., 2005). Ramani und Siegler verweisen direkt auf die Embodiment-Theorie in deren Konsequenz das Bilden abstrakter konzeptioneller Repräsentationen durch körperliche Bewegungen unterstützt wird (Ramani & Siegler, 2008). Sie gehen also davon aus, dass körperliche Betätigungen oder auch Interaktionen Einfluss auf kognitive Prozesse und konzeptionelle Darstellungen hat.

Bei Ganita handelt es sich ebenfalls um ein nicht-digitales Brettspiel, bei dem die Spieler miteinander interagieren und sich bewegen müssen. Zusätzlich gibt es, wie schon in Kapitel 2.2 erläutert, viele Pantomimeaufgaben, in denen Bewegung direkt mit mathematischen Inhalten, also motorische und sensorische Aktivität mit mentalen abstrakten mathematischen

Konzepten verbunden wird. Deshalb lohnt es sich, den Zugang des Embodiments zum Verstehen kognitiver Prozesse und folglich von Lernprozessen genauer zu betrachten.

Dieser Zugang distanziert sich von der traditionellen Vorstellung, der Geist und die kognitiven Prozesse seien komplett unabhängig vom menschlichen Körper und seinen motorischen und sensorischen Prozessen. Wahrnehmung und Handlung formen also keine kognitiven Prozesse, noch schränken sie sie ein. Die Embodiment-Theorie bestreitet genau dies und geht davon aus, dass der Körper Einfluss auf die Kognition hat, indem er sie einschränkt, reguliert und formt, und betrachtet Körper und Geist, die in Wechselbeziehung zueinanderstehen, als Einheit (R. A. Wilson & Foglia, 2013, S.319f).

Der Körper und seine sensorischen und motorischen Funktionen spielen also eine zentrale Rolle bei der Formung des Geistes (M. Wilson, 2002, S.625). Es besteht somit eine Abhängigkeit zwischen unserer Wahrnehmung, unserem Handeln und unserem Denken. Wer die Kognition verstehen will, muss sie folglich als Zusammenspiel aus Geist, Körper und Umwelt betrachten und die Beziehungen der drei Bereiche untersuchen (M. Wilson, 2002, S.625; R. A. Wilson & Foglia, 2013, S.319f). Mit dem Einfluss des Embodiment auf die kognitiven Prozesse folgt dessen Einfluss auf unsere Einstellungen, Emotionen und Handlungen (Tschacher & Storch, 2012, S.261).

Der menschliche Körper kann zwei unterschiedliche Funktionen bei kognitiven Prozessen erfüllen. Einerseits kann er sie einschränken, da das Reden und Denken über Objekte körperliche Aktivität voraussetzt. Der Körper mit seinen Merkmalen und Eigenschaften, die sich von Person zu Person unterscheiden, bestimmt also die kognitive Aktivität und den Inhalt der Repräsentationen. Ein Beispiel hierfür ist unsere Farbwahrnehmung, die durch die Zellen der Retina und die Eigenschaften des Sehapparats bestimmt wird. Andererseits kann der Körper der Anlass für kognitive Prozesse sein, indem er dazu beiträgt kognitive Prozesse zu realisieren. Neben den neuralen Aktivitäten erfüllt auch der Körper eine Funktion in der Kontrolle der Kognition: „cortical organization is modeled by our embodied experiences, and […] body-induced changes regulate brain enhancement, information processing, and cognitive development“ (R. A. Wilson & Foglia, 2013, S.322). Beispiel hierfür ist die Bewegung der Hände und Arme, die uns bei der Erweiterung des Vokabulars oder der Entwicklung einer Sprache helfen kann (R. A. Wilson & Foglia, 2013, S.321f).

Hinweise für die Embodiment-Theorie sind zum Beispiel die Gesten, die wir beim Sprechen nutzen. Sie erfüllen nicht nur eine kommunikative Funktion, sondern können auch das Denken des Sprechers beeinflussen (R. A. Wilson & Foglia, 2013, S.320f). Ebenso werden mathematische Konzepte oft mittels Gesten oder Zählen mit den Fingern dargestellt.

Der Körper wird hier aktiv und direkt für das Lösen kognitiver Aufgaben zu Hilfe genommen und ermöglicht so eine Verringerung der Rechenarbeit (R. A. Wilson & Foglia, 2013, S.320f). Ebenso stützt die Tatsache, dass abstrakte Konzepte oft mittels Metaphern für körperliche und physische Konzepte ausgedrückt werden, die Embodiment-These (M. Wilson, 2002, S.625).

Um die Auswirkung körperlicher Zustände auf psychische Prozesse zu untersuchen, mussten in einer Studie die Probanden mit unterschiedlichen Körperteilen schreiben. Eine Gruppe musste den Stift zwischen die Lippen nehmen, eine zweite zwischen die Zähne und die dritte Gruppe schrieb mit der nicht-dominanten Hand. Beim Schreiben mit dem Stift zwischen den Lippen werden die Muskeln, die für das Lachen zuständig sind, gehemmt während sie beim Schreiben mit dem Stift zwischen den Zähnen aktiviert werden. Danach mussten alle drei Gruppen Cartoons danach bewerten, wie witzig sie sind. Dabei zeigte sich, dass die Gruppe, die mit dem Stift zwischen den Zähnen geschrieben hatte, die Cartoons signifikant witziger bewertete als die anderen Gruppen. In einer weiteren Studie konnte der Einfluss von Bewegung auf die Einstellung der Probanden nachgewiesen werden. Je nachdem, ob sie mit dem Kopf nicken oder ihn schütteln mussten, hatten sie danach eine positivere bzw. negativere Einstellung zu einer Aussage (Tschacher & Storch, 2012, S.261).

Wilson fasst sechs wesentlichen Standpunkte zusammen, die in der Embodiment-Theorie vertreten werden:

1. „Cognition is situated“ (M. Wilson, 2002, S.626)

Situiert meint, dass die kognitive Aktivität immer in einer realen Umgebung und in einer Situation, die für eine Aufgabe relevant ist, stattfindet und diese Umgebung die kognitive Aktivität beeinflusst. Zur Situation und Umgebung gehören einerseits wahrnehmbare Informationen sowie andererseits motorische Aktivitäten, die die Umwelt verändern. Kognition findet also unter aufgabenrelevanten Inputs und Outputs statt. Kognitive Aktivität muss aber nicht immer situiert sein. Dann findet sie „‘off-line‘, in the absence of task-relevant input and output“ (M. Wilson, 2002, S.626) statt. Ein Beispiel hierfür ist die kognitive Aktivität des Erinnerns. Diese nicht-situierte Kognition ist eine Besonderheit des menschlichen Denkens, die ihn zu abstraktem Denken befähigt. Trotzdem gibt es Momente in denen eine situierte kognitive Aktivität vorteilhaft ist bzw. stärker genutzt wird (M. Wilson, 2002, S.626f).

In einem kooperativen Lernspiel kommt der Input, der die kognitive Aktivität beeinflusst, einerseits vom Spiel selbst und andererseits von den Mitspielern. Kognitive Aktivität hat hier also einen stark situierten Charakter. Es gibt durchaus aber auch off-line Aktivität. Wenn die Spieler Aufgaben lösen müssen, müssen sie sich z. B. an bestimmtes Wissen erinnern.

2. „Cognition is time pressured“ (M. Wilson, 2002, S.626)

Kognitive Prozesse müssen schnell und effizient von statten gehen, da Echtzeit-Interaktionen mit der Umwelt Druck auf die Kognition ausüben. Eine Generalisierung dieses Standpunktes wäre aber ebenso wie bei der Situiertheit falsch, da es viele Situationen gibt, in denen kein Zeitdruck herrscht. Auch ist nicht geklärt, ob das menschliche kognitive System erfolgreich mit dem Zeitdruck umgeht (M. Wilson, 2002, S.628).

Im Spiel Ganita müssen die Aufgaben in einer bestimmten Zeit gelöst werden, der Zeitdruck wird also durch die Spielregeln geschaffen. Die kognitiven Aktivitäten der Spieler sind demnach oft situiert und finden unter Zeitdruck statt.

3. „We off-load cognitive work onto the environment” (M. Wilson, 2002, S.626)

Da die kognitiven Fähigkeiten beschränkt sind – es können z. B. nicht unendlich viele Informationen im Gedächtnis abspeichert werden –, geben Menschen kognitive Arbeit an ihre Umwelt ab. Dazu nutzen sie zwei Strategien. Eine besteht darin, ihre Umwelt strategisch zu nutzen, indem sie Informationen auslagern oder die Umwelt verändern. Die andere verwendet körperliche Aktivität als Entlastungsstrategie. So werden z. B. Stift und Papier zum Lösen mathematischer Aufgaben oder Gesten beim Sprecher zum Ausdrücken des Denkprozesses verwendet. Um abstrakte, nichträumliche Bereiche des Denkens darzustellen, können folglich physikalische Zeichen und räumliche Relationen genutzt werden (M. Wilson, 2002, S.628f).

Ganita gibt den Spielern Möglichkeiten, solche Strategien zu nutzen und kognitive Arbeit abzuladen, indem z. B. Zettel und Stift während des gesamten Spiels genutzt werden dürfen oder die Aufgaben kooperativ gelöst werden.

4. „The environment is part of the cognitive system” (M. Wilson, 2002, S.626)

Kognitive Aktivität wird von Körper und Umwelt beeinflusst und der Prozess der Kognition verteilt sich auf die Interaktion zwischen Geist, Körper und Umwelt. Gestützt wird diese These dadurch, dass sich die Gründe für unser Verhalten und kognitive Ereignisse im Geist und in der Umwelt finden lassen. Die Frage, die sich nun stellt, ist, ob die Situation, in der kognitive Aktivität stattfindet, und das Individuum als einheitliches System betrachtet werden müssen, um Kognition zu erforschen. Dagegen spricht, dass dieses System dann unter anderem durch die Situation definiert wäre und die Organisation, also die funktionale Beziehung zwischen den Elementen des Systems, sich durch die Änderung des Ortes oder durch die Interaktion mit anderen Objekten ändern würde. Sinnvoller wäre es davon auszugehen, dass das System allein aus dem Geist besteht und sich somit durch Dauerhaftigkeit auszeichnet, es sich aber um ein offenes System handelt, das durch den Input der Umwelt beeinflusst wird sowie einen Output hat, der die Umwelt beeinflusst (M. Wilson, 2002, S.629ff)

5. „Cognition is for action“ (M. Wilson, 2002, S.626)

Diese These geht davon aus, dass kognitive Aktivität zum Ziel hat, Handlung zu leiten. Folglich muss für das Verständnis von Kognition dieser Zusammenhang betrachtet werden. Auch diese Eigenschaft ist evolutionsbedingt, denn die Entwicklung unseres kognitiven Gerüsts wurde durch adaptives und situationsangemessenes Verhalten gesteuert (M. Wilson, 2002, S.632)

6. „Off-line cognition is body based” (M. Wilson, 2002, S.626)

Motorik und Wahrnehmung gelten nach dieser These als Grundlage für geistige Aktivität. Selbst bei abstrakter kognitiver Aktivität werden sensomotorische Funktionen verwendet, aber „versteckt“. So ist die kognitive Aktivität des Zählens zunächst an eine motorische Aktivität – Bewegung der Finger – gekoppelt, findet aber irgendwann nur noch im Kopf statt. Die kognitive Aktivität ist also entkoppelt und somit offline. Unsere Imagination, ein Vorgang, auf den keine externen Simulationen Einfluss haben, ist eng verbunden mit der gewöhnlichen Wahrnehmung, die an externe Simulationen gekoppelt ist.

Belege dafür lassen sich z. B. im Arbeitsgedächtnis, im episodischen Gedächtnis oder auch beim Argumentieren und Problemlösen finden. Werden zwei Wörter, die ähnlich klingen, im Arbeitsgedächtnis abgespeichert, so ist es schwieriger, sich an sie zu erinnern, als wenn sie keine phonetischen Ähnlichkeiten besitzen würden. Im episodischen Gedächtnis werden Ereignisse mit allen Eindrücken wiedererlebt, der erinnerte Input wird also nochmals so wie in der Situation selbst wahrgenommen. Die Fähigkeiten des Argumentierens und Problemlösens machen beide Gebrauch von sensomotorischen Simulationen. So werden abstrakte Probleme oft mittels mentaler, z. B. räumlicher, Modelle gelöst (M. Wilson, 2002, S.634f).

Wilson fasst die Thesen zum Schluss nochmals mit folgenden Worten zusammen: „rather than the mind operating to serve the body, we find the body (or its control systems) serving the mind” (M. Wilson, 2002, S.635).

Eine Folge dieser Sichtweise auf Kognition ist, dass motorische und sensorische Aktivitäten durch ihren Einfluss auf den kognitiven Prozess auch Einfluss auf den Lernprozess haben. Traditionelle Lernmethoden können überdacht und neue Methoden, die motorische und sensorische Aktivitäten beinhalten, entwickelt werden.

Außerdem kann der Körper während des Lernprozesses dazu genutzt werden, den Lerner zu entlasten. Informationen können z. B. umgeladen werden, um den kognitiven Prozess zu vereinfachen (vgl. These drei). Ebenfalls kann der Lerner durch seine Körperhaltung und Mimik Einfluss auf seine Gedächtnisleistung nehmen und Inhalte besser behalten oder erinnern (R. A. Wilson & Foglia, 2013, S.321). Die Umgestaltung des Lernprozesses auf Grundlage der Embodiment-These kann also dazu führen kognitive Aufgaben wie Erinnern, Vorstellen, Argumentieren oder Problemlösen effektiver zu lösen.

Fischer und Moeller entwarfen in einer Studie ein räumliches numerisches Training, um den Einfluss des Embodiment auf den Lernprozess zu untersuchen. Das Training bestand aus einer Aufgabe, in denen 27 Kinder im Durchschnittsalter von sieben Jahren und zehn Monaten Zahlen auf einer Zahlengeraden einordnen mussten. Die Aufgabe wurde auf einem interaktiven Whiteboard bearbeitet und die Kinder mussten sich nach rechts oder links bewegen, um die Zahl auf der Zahlengeraden einzuordnen. Es fand also motorische Aktivität in Form von einer Bewegung mit dem ganzen Körper statt. Untersucht werden sollte, ob das Training die Rechenfähigkeit der Kinder verbesserte. Die Annahme, dass ein solcher Erfolg erzielt werden könne, beruht auf der Embodiment-Theorie.

Fischer und Moeller (2015) gehen davon aus, dass es einen Zusammenhang zwischen Zahlen und körperlichen Erfahrungen gibt. Die Assoziation zwischen Raum und Zahlen kann durch die numerische Aufgabe, Zahlen auf einer Zahlengeraden einzuordnen, indem man sich nach links (kleine Zahl) oder rechts (große Zahl) bewegt, gestärkt werden.

Zur Validierung dienten zwei Kontrollgruppen. Eine Kontrollgruppe löste die gleiche Aufgabe, aber ohne die Bewegungskomponente, die andere bearbeitete eine andere Aufgabe und musste sich dabei bewegen. Die letztere Gruppe dient dazu sicherzustellen, dass der Trainingseffekt nicht ausschließlich durch motivationale Effekte, die durch Bewegung zustande kommen, erzielt wird. Überprüft wurde die Hypothese durch einen Test mit mehreren Rechenaufgaben vor und nach dem Training. Die Testaufgaben wurden zum einen Teil auf Papier, zum anderen Teil auf einem Tablet gelöst.

Die größte und signifikante Verbesserung konnte in der Testgruppe nachgewiesen werden. Die Gruppe, die sich am wenigsten verbesserte, war die zweite Kontrollgruppe, die am nicht-numerischen embodied Training teilnahm. Zusätzlich wurde beobachtet, dass die Leistung der Kontrollgruppe ohne Bewegung nach dem Training im Vergleich zu den beiden anderen Gruppen abfiel. Dies spricht für einen positiven Effekt der Bewegung und ihrer motivierenden Wirkung. Sie kann also nützlich sein, um die Motivation und Konzentration der Kinder aufrechtzuerhalten. Fischer und Moeller betonen die praktische Anwendbarkeit des Trainings im Unterricht, da nur ein White-Board gebraucht wird und schließen, dass die Bewegung mit dem ganzen Körper und somit der Embodiment-Zugang die Effizienz von numerischen Trainings fördern kann und im Unterricht oder beispielsweise in SG eingesetzt werden sollte (Fischer, Moeller, Huber, Cress, & Nuerk, 2015).

3.4. Effektivität von Ganita

Das Lernspiel Ganita wird in diesem Kapitel hinsichtlich der Thesen und Kriterien, die in den Kapiteln 3.2.1, 3.2.2 und 3.2.3 besprochen wurden, analysiert.

In Kapitel 3.2.1 wird Homann erwähnt, der darauf hinweist, dass es wichtig ist, dass die Aktivität als Spiel empfunden wird, damit die Bereitschaft der Schüler, sich mit den mathematischen Themen auseinanderzusetzen, gefördert wird. Wie schon weiter oben (Kapitel 3.1) erwähnt, erfüllt Ganita alle Anforderungen, um als Spiel wahrgenommen zu werden und auch in den Unterrichtsbesuchen wurde Ganita von allen Schülern als Spiel aufgefasst.

Es gibt viele Aufgaben, bei denen Schüler analysieren, kombinieren und Strukturen erkennen müssen, wodurch ihnen die Möglichkeit gegeben wird Strategien zu entwickeln (vgl. These 3 Homann). Beispielsweise müssen sie in einer Aufgabe die nächste Zeile des Pascalschen Dreiecks herausfinden (die ersten fünf sind vorgegeben) und somit die Struktur des Dreiecks erkennen. Weitere Aufgaben lauten:

> „Genau wann ist eine Zahl gerade?
> a) Wenn sie sich ohne Rest durch 3 teilen lässt.
> b) Wenn sie sich ohne Rest durch 4 teilen lässt.
> c) Wenn sie sich ohne Rest durch 0 teilen lässt.
> d) Wenn sie sich ohne Rest durch 2 teilen lässt.“

Hier müssen die Schüler eine äquivalente Charakterisierung des Konzeptes "gerade" herausfinden.

> „Was ergibt 2^0?
> Tipp: $2^3 = 8$, $2^2 = 4$, $2^1 = 2$. Überlege dir wie du zur niedrigeren Potenz gelangst.“

Bei dieser Aufgabe müssen die Schüler zuerst die Struktur und den Zusammenhang zwischen den Potenzen erkennen und herausfinden wie man von der höheren Potenz zur nächstkleineren kommt, um den Tipp dann mit der Frage zu kombinieren und das Schema weiterzuführen.

Die verschiedenen Aufgabentypen, die Homann aufführt, um die mathematische Begriffsbildung der Schüler zu fördern (vgl. These 5 Homann), finden sich auch auf den

Aufgabenkarten von Ganita. Im Folgenden werden die Aufgabentypen von Homann (Homann, 1995, S.6) und einige Beispiele aus Ganita dazu genannt:

„Beschreiben von Gegenständen durch Angabe von Eigenschaften“:

> „Um diese Karte zu gewinnen, erkläre diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst weder das Wort selbst, Teile davon, noch die verbotenen Wörter verwenden.
> Der stumpfe Winkel“

„Finden von Gegenständen zu gegebenen Eigenschaften“:

> „Um diese Karte zu gewinnen, findet eine Zahl, die diese Eigenschaften hat:
> Die kleinste ganze Zahl, die auf Zehner gerundet 345000 ergibt“
>
> „Um diese Karte zu gewinnen, findet eine Zahl, die diese Eigenschaften hat:
> Gerade, größer als 100, durch 3 teilbar“
>
> „Um diese Karte zu gewinnen, findet eine Figur, die diese Eigenschaften hat:
> Besitzt mindestens 4 Spiegelachsen“

„Finden und Beschreiben von Beziehungen zwischen Gegenständen“:

> „Um diese Karte zu gewinnen, erkläre den Unterschied zwischen diesen Dingen:
> Echter Bruch und unechter Bruch“

„Sortieren von Gegenständen, Zuordnen von Gegenständen zu Mengen“:

> „Um diese Karte zu gewinnen, bewertet diese Aussage (richtig) mit ‚wahr‘ oder ‚falsch‘:
> Jede natürliche Zahl ist auch eine ganze Zahl.“

„Beschreiben von Mengen“:

> „Um diese Karte zu gewinnen, erkläre diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst weder das Wort selbst, Teile davon, noch die verbotenen Wörter verwenden.
> Die natürlichen Zahlen“

„Ordnen von Gegenständen oder Mengen“:

> „Um diese Karte zu gewinnen, …
> …sortiere die folgenden Zahlen der Größe nach:
> 46, IX, 2, 73, CIV“

„Finden und Beschreiben von Ordnungsschemata“:

> „Um diese Karte zu gewinnen, ….
> …denke dir eine aufsteigende oder absteigende Kette von rationalen Zahlen aus. Die Kette muss mindestens 5 Glieder haben.“

„Zusammensetzen und Zerlegen ebener Figuren und räumlicher Körper“:

> „Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:
> Welches der beiden Netze ergibt einen Würfel?“ [Zwei Netze sind auf der Aufgabenkarte abgebildet]

„Unterscheiden und Benennen geometrischer Figuren und Körper“:

> „Um diese Karte zu gewinnen, erkläre den Unterschied zwischen diesen Dingen:
> Parallelogramm und Trapez“

Ganita gibt die Gelegenheit, entdeckendes Lernen und eigene Untersuchungen anzuregen (vgl. These 6 Homann), insbesondere durch das Lexikon, in dem Schüler mathematische Begriffe, Konzepte und Persönlichkeiten entdecken können, und durch die außerschulischen Themen, für die es eventuell andere Vorgehensweisen als in der Schule benötigt werden. Beispiele wären hierfür folgende Aufgabenstellungen:

> „Um diese Karte zu gewinnen, schätzt die Antwort auf folgende Frage:
> Wie viele Farben werden benötigt, um eine Landkarte so einzufärben, dass keine benachbarten Felder dieselbe Farbe haben?“

> „Um diese Karte zu gewinnen, …
> …finde einen Trick, um 1 + 2 + 3 + … + 9 + 10 schnell auszurechnen.“

Durch die kooperative Komponente müssen alle Schüler zur Lösung einer Aufgabe beitragen und sich aktiv beteiligen (vgl. These 7 Homann). Auch die Bewegung durch die Pantomimeaufgaben lässt die Schüler sich noch aktiver am Geschehen beteiligen. Dadurch werden sie aufmerksamer und fokussierter.

Ganita bietet Chancen zur Förderung schwächerer Schüler durch die Glückselemente, die ins Spiel eingebaut sind. Zum einen muss gewürfelt werden, um zum nächsten Spielfeld zu gelangen, und die Kategorie der Aufgabe, die man lösen muss, ist somit zufällig. Auch sind die Karten nicht nach Schwierigkeitsgrad sortiert und ob eine leichtere oder schwerere Karte gezogen wird, bestimmt der Zufall. Die Teams müssen sich gegenseitig kontrollieren, wobei nicht immer eine eindeutige Lösung auf der Aufgabenkarte vorgegeben ist. Gibt es mehrere Lösungsmöglichkeiten, so ist nur ein Beispiel angegeben und die Schüler müssen durch selbstständiges und logisches Denken beurteilen, ob ihre Lösung auch richtig ist. Dies fördert die Eigenständigkeit und das Urteilungsvermögen der Schüler. Die verschiedenen Schwierigkeitsgrade, Kategorien und Themenbereiche erleichtern eine Individualisierung und Differenzierung zwischen den Schülern.

In Kapitel 3.2.1 wurden auch einige Kriterien genannt, die dazu führen, dass die Lernziele eines Lernspiels erreicht werden. Die Spielmaterialien sollten gut zugänglich, einfach herzustellen und zu handhaben sein, was durch die Bereitstellung Ganitas auf der Onlineplattform *https://imaginary.org/*, wo das Spiel umsonst heruntergeladen oder im Shop bestellt werden kann, gegeben ist. Das Design wurde in den Unterrichtsbesuchen als positiv und ansprechend bewertet, vor allem die Spielfiguren gefielen den Schülern gut. Die

Auswertung der Unterrichtsbesuche weisen auch darauf hin, dass das Verhältnis von Lern- und Spielwert im Gleichgewicht steht. Eine große Anzahl an Schülern gab in der anschließenden Evaluation an, dass ihnen das Spiel Spaß gemacht hat und sie etwas gelernt haben.

Die unterschiedlichen Schwierigkeitsgrade sowie die Beschränkung der maximalen Anzahl an zu gewinnenden Karten pro Runde tragen dazu bei, dass das Spielziel erreichbar ist. Die Spieldauer kann vom Lehrer festgelegt werden und an die momentanen Bedürfnisse des Unterrichts angepasst werden. Die Spielregeln wurden von den Schülern meist als verständlich bewertet, wobei manche sie etwas lang fanden. Daraufhin wurde der Abschnitt „Das müsst ihr beim ersten Spielen wissen“ eingefügt, der sehr kurz gehalten ist und nur die wichtigsten Regeln erläutert. Somit sollte sichergestellt sein, dass die Länge der Spielanleitung angemessen ist.

Die Selbstüberprüfung der Antworten wird durch die angegebene Lösung auf den Aufgabenkarten ermöglicht. Auch eine häufige Wiederholung des Spiels ist möglich, da es eine große Anzahl an Aufgabenkarten (483) gibt und durch das Hinzufügen neuer Aufgabenkarten das Spiel erweitert werden kann. Der Freiraum wird durch die Möglichkeit der Variation der Spielregeln und das wie gerade erwähnte Erstellen eigener Karten gewährt.

Die Kriterien, die vor, während und nach dem Einsatz des Spiels erfüllt werden sollten, sind zumeist vom Lehrer abhängig. Dieser muss z. B. beurteilen, ob die Bereitschaft einer Klasse zu spielen gegeben ist oder nicht. Ganita gibt dem Lehrer die Gelegenheit, die Rolle des Begleiters zu übernehmen und Kontrolle abzugeben sowie durch den vielen Input auf den Karten und im Lexikon Inhalte und Ideen aufzugreifen und diese noch mehr zu vertiefen.

Laut Randel und Morris wurden Spiele bevorzugt, die ein klares Ziel, ein gewisses Maß an Unvorhersehbarkeit haben und bei denen die Schnelligkeit der Antwort zählt (siehe Kapitel 3.2.1). Bei Ganita gewinnt das Team, das die meisten Karten gesammelt hat, was ein klares und eindeutiges Ziel ist. Die Spieler wissen nie, welche Aufgabe sie als nächstes gestellt bekommen werden, womit diese für sie unvorhersehbar ist, und jede Aufgabe muss in einer relativ kurzen Zeit gelöst werden (eine oder zwei Minuten), womit die Schnelligkeit der Antwort zählt.

Der folgende Abschnitt bezieht sich auf Kapitel 3.2.2 und 3.2.3, wobei nur noch diejenigen Thesen und Kriterien bezüglich der Effektivität von Lernspielen aufgegriffen werden, die noch nicht in den vorherigen Abschnitten dieses Kapitels genannt wurden bzw. in späteren Kapiteln genannt werden.

Der Lernprozess in Ganita findet durch das Lösen der Aufgabenkarten mit seinem Team statt. Nur durch das Lösen dieser Karten hat das Team eine Chance zu gewinnen. Somit wird Lernprozess von den Schülern als Teil des Spielprozesses und nicht als etwas Externes wahrgenommen. Breuer und Bente schlagen Links zu Wikipedia-Artikeln vor, um das Interesse und die Neugierde der Spieler zu steigern. Ganita hat ein eigenes Lexikon und auf den Aufgabenkarten sowie innerhalb des Lexikons gibt es Querverweise zu den Lexikonartikeln. Dadurch wird ein selbstgesteuertes und aktives Lernen ermöglicht sowie möglicherweise Interesse und Neugierde geweckt.

Boyle und Hainey berichteten in ihrer Review, dass Kinder, die Spiele selbst erstellten, einen größeren Lerneffekt erzielten. Ganita bietet den Schülern den Freiraum, das Spiel durch Hinzufügen neuer Aufgabenkarten oder Verändern der Regeln zu erweitern. So können sie sich zum Beispiel am Ende einer Unterrichtseinheit Aufgabenkarten zu diesem Thema ausdenken und das Thema dadurch nochmals wiederholen, vertiefen und aus einer anderen Perspektive betrachten, was womöglich zu einem größeren Lerneffekt führt. Ganita macht durch viele anwendungsorientierte Aufgaben den Transfer theoretischer mathematischer Konzepte in den praktischen Alltag möglich, wie z. B. in folgenden Aufgaben:

> „Um diese Karte zu gewinnen, nennt ein Beispiel aus dem Alltag, wo man diese mathematische Idee sinnvoll benutzen kann. Jeder vernünftige Vorschlag zählt!
> Der Schwerpunkt im Dreieck“

> „Um diese Karte zu gewinnen, nennt ein Beispiel aus dem Alltag, wo man diese mathematische Idee sinnvoll benutzen kann. Jeder vernünftige Vorschlag zählt!
> Der Quotient zweier Zahlen“

Verschiedene Schülertypen mit unterschiedlichen Interessen werden durch die verschiedenen Kategorien und unterschiedlichen Themen berücksichtigt. Geschichtliche Aufgaben sowie die Verknüpfung zu anderen Wissenschaften stellen sicher, dass nicht immer nur ein Schülertyp gewinnt. In folgender Aufgabe wird z. B. Bezug auf die Biologie genommen:

> „Um diese Karte zu gewinnen, schätzt die Antwort auf diese Frage:
> Wie groß ist das größte Säugetier der Welt?“

Ninaus und Pereira untersuchten drei Spielelemente (Fortschrittsbalken, Niveauanzeige, thematischer Rahmen) und stellten fest, dass diese einen positiven Beitrag zum Lerneffekt leisten. Zwar findet sich in Ganita kein digitaler Fortschrittsbalken, die Schüler können aber ihren Fortschritt in Form der Anzahl gewonnener Karten verfolgen. Auch geben die Kategorien und Unterkategorien einen thematischen Rahmen vor.

In den verschiedenen Aufgaben von Ganita werden auch die Faktoren berücksichtigt, die nach Roungas das Lernen beeinflussen. Zu einem Thema gibt es verschiedene Aufgabentypen oder die gleiche Aufgabe kommt etwas variiert auf mehreren Aufgabenkarten vor, z. B.:

> „Um diese Karte zu gewinnen, …
> …finde einen Trick, um 1 + 2 + 3 + … + 9 + 10 schnell auszurechnen."
>
> „Um diese Karte zu gewinnen, bewertet diese Aussage (richtig) mit ‚wahr' oder ‚falsch':
> 1 + 2 + 3 + … + 98 + 99 + 100 = 101 • 50?"
>
> „Um diese Karte zu gewinnen, bewertet diese Aussage (richtig) mit ‚wahr' oder ‚falsch':
> Jede natürliche Zahl ist auch eine ganze Zahl."
>
> „Um diese Karte zu gewinnen, bewertet diese Aussage (richtig) mit ‚wahr' oder ‚falsch':
> Jede ganze Zahl ist auch eine natürliche Zahl."

Dadurch werden Inhalte wiederholt und geübt. Wichtig ist hier anzumerken, dass die Spieler die Aufgaben nicht als Strafe wiederholen, sondern aus Zufall oder wenn der Lehrer die Karten vorher dementsprechend sortiert hat.

Stimuli werden durch die Aufgabenkarten, durch die Interaktion zwischen den Spielern und durch Erfolgserlebnisse, wie das richtige Lösen einer Aufgabe, oder Misserfolgserlebnisse, wie das falsche Lösen einer Aufgabe, hervorgerufen. Deren Dauer und Intensität hängen von den Spielern und den Umständen ab.

Im Laufe des Spiels werden die Spieler für das richtige Beantworten einer Aufgabe belohnt, indem sie die Karte behalten dürfen und einen Punkt bekommen. Ein Nachlassen des Effekts der Belohnung wird dadurch verhindert, dass ein Team nicht unendlich viele Karten hintereinander gewinnen kann. Das falsche Beantworten einer Frage zieht keine schlimmen Konsequenzen nach sich, womit es keine Bestrafung für Fehler gibt.

Anhand des Frameworks von Echeverría und García-Campo, der sich vor allem auf kognitive Prozesse und Wissenserwerb bezieht, kann Ganita hinsichtlich seines Effektes auf diese beiden Lernziele analysiert werden. Die Merkmale, die im Framework als vorteilhaft für die kognitiven Prozesse und Wissensbereiche genannt werden, werden im Folgenden direkt auf das Spiel Ganita angewandt.

Der kognitive Prozess des Erinnerns wird durch wiederholende Aufgaben, durch die die Spieler durchgehend mit ähnlichen Inhalten konfrontiert werden, gefördert. Wie schon erwähnt, werden die Spieler bei jeder richtigen Antwort durch den Gewinn der Karte belohnt. Wie weiter oben erläutert, gibt Ganita die Gelegenheit, mathematische Zusammenhänge frei zu entdecken, und durch die sofortige Einsicht, ob eine Aufgabe richtig oder falsch gelöst wurde, wird klares Feedback gegeben. Das erlaubt den Schülern zu verstehen, wie ein Prozess oder ein Konzept funktioniert, und fördert so den Prozess des Verstehens. Die Schüler können ihr spezifisches Wissen durch die Alltagsaufgaben direkt anwenden und fördern so diesen kognitiven Prozess. Des Weiteren gibt es einige Problemlöseaufgaben, die die Analysefähigkeit fördern, wie z. B.:

> „Um diese Karte zu gewinnen, löst diese Aufgabe:
> Mark ist älter als Gabi. Anne ist jünger als Gabi, aber älter als Julia. Wer ist am jüngsten?“

> „Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:
> Ist es möglich ein Viereck mit drei Geraden zu bilden?“

Auch der Prozess des Bewertens wird durch Aufgaben, bei denen die Schüler eine Aussage als wahr oder falsch beurteilen, einen Fehler finden, etwas korrigieren oder verändern müssen, gefördert. So z. B. in folgenden Aufgaben:

> „Um diese Karte zu gewinnen, bewertet diese Aussage (richtig) mit ‚wahr‘ oder ‚falsch‘:
> Multipliziert man zwei ungeraden Zahlen, so ergibt das wieder eine ungerade Zahl.“

> „Um diese Karte zu gewinnen, findet den Fehler in dieser Rechnung:
> 2 + 3 • 5 = 25“

Ebenfalls müssen die Schüler zum Teil neue Lösungsmöglichkeiten finden und diese auch testen, was den kognitiven Prozess des Kreierens positiv beeinflusst. Faktenwissen wird geschaffen, indem eine Tatsache als Inhalt im Spiel erscheint und vom Spieler visualisiert werden kann. Dies ist insbesondere bei den Pantomime- und Zeichenaufgaben der Fall, aber auch bei allen anderen Aufgaben, da die Spieler jederzeit die Möglichkeit haben, Stift und Papier zu benutzen oder zu gestikulieren. Beispiele für Pantomime- und Zeichenaufgaben sind folgende Aufgaben:

> „Um diese Karte zu gewinnen, stelle diesen Begriff pantomimisch dar. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche machen.
> Das Runden“

> „Um diese Karte zu gewinnen, zeichne diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche und keine Gesten (erklärende Bewegungen) machen.
> Das Volumen“

Den Spielern wird Gelegenheit gegeben, bestimmte mathematische Prozesse zu erforschen, auszuführen oder zu kreieren, wodurch Prozesswissen vermittelt wird. Meta-kognitives Wissen wird ebenfalls vermittelt, da die Schüler ihre Denkprozesse für ihre Mitspieler offenlegen müssen und argumentieren müssen, warum ihre Antwort richtig ist.

Kriterien, die Spaß und Motivation am Spiel fördern, werden über die gesamte Literatur hinweg als wichtiger Aspekt betont, weswegen in dieser Arbeit das nächste Kapitel diesem Thema gewidmet sein wird.

4. Motivation

Motivation ist eines der wichtigsten Argumente für das Nutzen von Spielen im Unterricht (vgl. Kapitel 3) und Grundlage für die Effektivität der Spiele. In diesem Kapitel werden wir sehen, dass Motivation auch Grundlage für ein effektives und qualitatives Lernen ist und somit ein Zusammenhang zwischen der Motivation im Spiel und dem Lernerfolg durch das Spiel besteht. Hierzu wird zunächst auf die theoretischen Grundlagen der Motivation in Form ausgewählter Motivationstheorien und -konzepte eingegangen. Danach wird der Zusammenhang zwischen Motivation und Lernen herausgestellt. Schließlich wird argumentiert, warum in Ganita die Motivation auf eine Weise gefördert wird, dass sie die Lernqualität verbessert und zu positiven Lernergebnissen führt.

4.1. Theoretische Grundlagen

Zunächst stellt sich die Frage, was Motivation und motiviertes Handeln bedeutet.

> „Motivation is the study of why people think and behave as they do." (Graham & Weiner, 1996, S.63)

Die zentralen Fragestellungen sind also, warum wir unser Verhalten auf ein bestimmtes Ziel richten und mit welcher Intensität bzw. Dauer und Beharrlichkeit wir es ausführen (Gagné, 1980, S.267; Strobach & Wendt, 2018, S.53; Wirtz & Strohmer, 2014, S.1114). Weiterhin werden die kognitiven und emotionalen Reaktionen während eines bestimmten Verhaltens, also was wir dabei denken und fühlen, betrachtet (Graham & Weiner, 1996, S.63). Allgemein wird davon ausgegangen, dass motivierte Handlungen sich auf eine befriedigende Erfahrung oder ein befriedigendes Handlungsergebnis richten (Deci & Ryan, 1993, S.224). Ebenso stellt sich die Frage, ob unsere Verhaltensweisen angeboren oder erlernt sind (Wirtz & Strohmer, 2014, S.1115). Strobach und Wendt unterscheiden in diesem Zusammenhang zwischen biogenen und soziogenen Anreizklassen. Biogene Anreizklassen sind körperlich, wie z. B. Hunger, und entsprechen dem, was wir umgangssprachlich Triebe nennen. Soziogene Anreizklassen unterteilen sich in Leistung, Anschluss und Intimität und Macht. Motive sind Präferenzen, die ein Individuum für diese Anreizklassen hat und veranlassen somit eine motivierte Handlung (Strobach & Wendt, 2018, S.53).

Im Laufe der Geschichte der Psychologie wurden viele Motivationstheorien und -konstrukte aufgestellt, um menschliches Verhalten zu erklären. Hier wird nur ein kurzer Überblick gegeben und diejenigen Theorien bzw. Konstrukte erklärt, die besondere Relevanz für den Lernprozess und den schulischen Kontext haben.

In den sogenannten Erwartung-Wert-Theorien wird davon ausgegangen, dass ein Individuum abwägt, wie wahrscheinlich es ist, dass das Ziel der Handlung erreicht wird und wie attraktiv das Ziel ist, bevor es sich für eine Handlung entscheidet. Kurz gesagt stellt es sich die Frage, ob eine Handlung sich lohnt. Die Abwägung ist individuell unterschiedlich. Ist es jemandem besonders wichtig, eine Aufgabe erfolgreich zu bewältigen, so wird er sich nicht für die schwierigste Aufgabe entscheiden, sondern eher eine Aufgabe mittleren Schwierigkeitsgrad auswählen. Steht die erfolgreiche Bewältigung einer Aufgabe dagegen nicht an oberster Stelle, traut sich ein Individuum eventuell auch an schwierigere Aufgaben heran (Strobach & Wendt, 2018, S.54). In Atkinsons Theorie der Leistungsmotivation hängt die Entscheidung für oder gegen eine Handlung vom Leistungsmotiv, das erlernt und stabil ist, von der Erfolgswahrscheinlichkeit, die dadurch gemessen wird, wie schwer eine Aufgabe ist, und vom Anreizwert des Erfolgs, der wiederum durch die Erfolgswahrscheinlichkeit berechnet werden kann, ab. Der Anreizwert ist umso größer, je schwieriger eine Aufgabe ist. Ist die Erfolgswahrscheinlichkeit also sehr gering, so ist der Anreizwert sehr groß und umgekehrt. Atkinson geht davon aus, dass sich das Motivationsmaximum bei Aufgaben mittleren Schwierigkeitsgrads einstellt (Graham & Weiner, 1996, S.70).

Eine Theorie, die den Zusammenhang zwischen Motivation und Lernen zu erklären versucht und deshalb von großer Relevanz für den schulischen Kontext ist, ist die Selbstbestimmungstheorie von Deci und Ryan. Die Basis und das Zentrum dieser Theorie ist das Selbst. Motivationale Prozesse werden nach dem Grad ihrer Selbstbestimmung eingeteilt. Eine motivierte Handlung kann selbstbestimmt sein, wenn sie den Zielen und Wünschen des Selbst entspricht, oder kontrolliert, wenn sie als aufgezwungen, sowohl von außen als auch von innen, erlebt wird. Eine eindeutige Zuordnung ist nicht immer möglich, vielmehr wird eine Handlung auf einem Kontinuum zwischen Selbstbestimmtheit und Kontrolliertheit eingeordnet.

Somit wird auch die Unterscheidung zwischen intrinsischer und extrinsischer Motivation möglich. Handlungen, die aus intrinsischer Motivation hervorgehen, sind interessenbestimmt und brauchen keine Anstöße von außen. Die Handlung wird um ihrer selbst willen und aus persönlichem Interesse heraus ausgeführt. Kennzeichen, die eine intrinsisch motivierte Handlung begleiten sind Neugier, Exploration, Spontaneität, Interesse und Streben nach Verbesserung. Extrinsische motivierte Handlungen kennzeichnen sich durch ihre instrumentelle Funktion. Sie zielen auf etwas ab, das nichts mit der Handlung an sich zu tun hat. Kennzeichen solcher Handlungen sind, dass sie nicht spontan sind, auf eine Aufforderung hin ausgeführt werden und vom Ausführenden eine Bekräftigung erwartet wird. Für Deci und Ryan ist intrinsisch motiviertes Handeln somit selbstbestimmtes Handeln.

In einigen Studien wurde nachgewiesen, dass extrinsische Motivationsquellen das Gefühl der Selbstbestimmung und damit intrinsische Motivation untergraben können. Trotzdem stellen intrinsische und extrinsische Motivation keine Gegensätze dar, da auch extrinsisch motiviertes Verhalten selbstbestimmt sein kann, nämlich dann, wenn es in das individuelle Selbst internalisiert und integriert wurde. Um zu klären, was Internalisierung und Integration extrinsisch motivierten Verhaltens meint, spezifizieren Deci und Ryan den Begriff der extrinsischen Motivation noch weiter und unterscheiden zwischen externaler, introjizierter, identifizierter und integrierter Regulation.

Bei der externalen Regulation gibt es externe Faktoren, die Verhaltensweisen regulieren und auf die das Individuum keinen Einfluss hat. Die resultierenden Verhaltensweisen sind somit nicht autonom. Beispiele für diesen Regulationstyp sind Belohnung und Bestrafung. Im Fall der introjizierten Regulation sind die Faktoren, die die Verhaltensweisen regulieren, zwar intern, es handelt sich aber um inneren Druck oder interne Anreize. Somit ist auch diese Art der Motivation nicht selbstbestimmt. Ein Beispiel hierfür wäre, etwas für das gute Gewissen zu tun. Zeigt man ein Verhalten aufgrund von persönlicher Relevanz, weil einem etwas wichtig ist, so handelt es sich um identifizierte Regulation. Man kann sich mit den zugrundeliegenden Werten und Zielen der Verhaltensweisen identifizieren. Bei der integrierten Regulation wurden die Ziele, Normen und Handlungsstrategien in das Selbstkonzept integriert. Die Verhaltensweisen die aus der integrierten Regulation hervorgehen sind somit selbstbestimmt. Trotzdem bleibt die instrumentelle Funktion erhalten, was den Unterschied zur intrinsischen Motivation ausmacht.

Sowohl intrinsisch als auch extrinsisch motivierte Verhaltensweisen stehen mit den psychologischen Bedürfnissen des Menschen, die neben den physiologischen Bedürfnissen und den Emotionen sein Verhalten bestimmen, im Zusammenhang. So gibt es eine Verbindung zwischen dem Bedürfnis nach Kompetenz oder Wirksamkeit und den intrinsisch motivierten Verhaltensweisen und eine Verbindung zwischen dem Bedürfnis nach sozialer Eingebundenheit und den extrinsisch motivierten Verhaltensweisen, wobei letztere auch mit den ersten beiden Bedürfnissen verbunden sind. Das Erleben von Kompetenz und Autonomie erzeugt intrinsische Verhaltensweise und diese wiederum tragen zur Entstehung dieses Erlebens bei. Somit kann die soziale Umwelt durch die Unterstützung von Kompetenz- und Autonomiebedürfnissen intrinsische Motivation fördern.

Der sozialen Umwelt kommt somit eine wichtige Rolle in Bezug auf die Motivation eines Individuums zu. Es wurden einige Experimente durchgeführt, die diese These bestätigten. Teilnehmern wurden im Experiment verschiedene Rückmeldungen gegeben. Wurden diese als Druck und kontrollierend wahrgenommen (z. B. materielle Belohnungen, Strafandrohungen, Bewertungen, besondere Auszeichnungen, …), so untergruben sie die intrinsische Motivation. Solche, die als selbstständigkeitsfördernd erlebt wurden, indem sie die Eigeninitiative und Wahlfreiheit unterstützen (z. B. Wahlmöglichkeiten anbieten, anerkennende Gefühle äußern), erhielten oder verstärkten die intrinsische Motivation (Deci & Ryan, 1993, S.223-231).

Insbesondere können verschiedene Arten der Belohnung, des Feedbacks und des Unterrichtskontextes unterschieden werden, die je nach Art intrinsische Motivation fördern oder untergraben. Informative Belohnungen enthalten Feedback über den Fortschritt eines Individuums, signalisieren Kompetenz und fördern so das Gefühl der Selbstbestimmung. Der Belohnungskontext ist somit intrinsisch und fördert intrinsische Motivation. Kontrollierende Belohnungen werden als Zwang zu denken, fühlen und handeln erfahren, wodurch das Gefühl der Selbstbestimmung und Kompetenz vermindert und die intrinsische Motivation untergraben wird (Graham & Weiner, 1996, S.78).

Ebenso wie informative Belohnungen gibt es auch informatives Feedback. Dieses wirkt nicht kontrollierend, sondern autonomiefördernd und stärkt somit die erlebte Kompetenz, wodurch wieder die intrinsische Motivation gesteigert wird. Insbesondere kann auch negatives Feedback die intrinsische Motivation stärken, wenn es informativ ist. Dabei sollte es nicht bewertend sein und eher als eine Hilfe für zukünftige Aufgaben oder als Herausforderung wahrgenommen werden.

Im Schulkontext wurden mehrere Feldstudien durchgeführt, die die Wirkung autonomieunterstützender und kontrollierender Kontexte auf die Motivation der Kinder untersuchten. Ein autonomieunterstützender Kontext zeichnet sich dadurch aus, dass auf Lebensbezüge und Interessen der Kinder eingegangen wird. Kinder, die in diesem Kontext unterrichtet wurden, zeigten mehr Neugierde, Eigenständigkeit bei der Bewältigung von Problemen, eine günstigere Selbsteinschätzung und mehr intrinsisches Lerninteresse als solche, die in einem kontrollierenden Kontext unterrichtet wurden. Kompetenz- und Autonomieerfahrungen haben somit eine große Bedeutung für die intrinsische Motivation der Kinder. Durch die Unterstützung des Autonomiestrebens und Anteilnahme können Lehrende den Prozess der Internalisierung und Integration fördern.

Zusammenfassend ist also für das Entstehen selbstbestimmter Motivation eine Kombination aus dem Erleben von Kompetenz, Autonomie und Selbstwirksamkeit notwendig, wozu die soziale Umwelt und insbesondere die Schule einen großen Beitrag leisten kann (Deci & Ryan, 1993, S.230-235).

Deci und Ryan verweisen beim Beschreiben des Einflusses des sozialen Kontextes darauf, dass eine Aktivität ein optimales Anforderungsniveau besitzen muss, um intrinsisch motiviert zu sein. Das heißt die Aktivität darf weder als zu schwer, noch als zu leicht empfunden werden (Deci & Ryan, 1993, S.231). Diese These ist auch als *Flow*-Theorie bekannt und geht auf Csikszentmihalyi zurück. Auch er beschreibt den *Flow* als eine optimale Erfahrung beim Ausüben einer Aktivität, währenddessen das Individuum vollkommen von der Aktivität eingenommen wird und alle seine Kapazitäten ausschöpft.

Der *Flow*-Zustand kann nur unter gewissen Bedingungen erreicht werden: zum einen „Perceived challenges, or opportunities for action, that stretch (neither overmatching nor underutilizing) existing skills; a sense that one is engaging challenges at a level appropriate to one's capacities" und zum anderen „Clear proximal goals and immediate feedback about the progress that is being made" (Nakamura & Csikszentmihalyi, 2014, S.90). Eine Bedingung beschreibt also die optimale Herausforderung, die an die Fähigkeiten des Individuums angepasst sein sollte, dar, wie sie schon von Deci und Ryan erwähnt wurde. Nakamura und Csikszentmihalyi gehen davon aus, dass ein zu hohes Anforderungsniveau Ängstlichkeit auslöst, während ein zu niedriges Niveau zu Langeweile führt. Sie nennen zudem einige Eigenschaften in Bezug auf das Erleben des *Flow*-Zustandes:

- „Intense and focused concentration on what one is doing in the present moment
- Merging of action and awareness
- Loss of reflective self-consciousness (i.e, loss of awareness of oneself as a social actor)
- A sense that one can control one's actions; that is, a sense that one can in principle deal with the situation because one knows how to respond to whatever happens next
- Distortion of temporal experience (typically, a sense that time has passed faster than normal)
- Experience of the activity as intrinsically rewarding, such that often the end goal is just an excuse for the process" (Nakamura & Csikszentmihalyi, 2014, S.90)

Es gab viele Studien zur Theorie des *Flows*, die die These in unterschiedlichen Bereichen und über alle Kulturen, Klassen, Geschlechter und über das Alter hinweg nachweisen konnten. Der *Flow*-Zustand kann in so ziemlich allen Aktivitäten erreicht werden, es existieren aber so genannte *Flow*-Aktivitäten, die den Zustand wahrscheinlicher machen. Zu diesen gehören auch Spiele.

Ein wichtiges Merkmal ist, dass die *Flow*-Erfahrung nicht allein durch das Individuum bestimmt wird, sondern durch die Interaktion des Individuums mit der Umwelt, die gemeinsam ein dynamisches und offenes System darstellen. Das bedeutet, dass das, was kurz zuvor in der Interaktion stattfand, Einfluss auf das hat, was danach passiert, und die Ziele aus der Interaktion heraus entstehen und schließlich zur Motivation des Individuums führen.

Eine wichtige Funktion für das Entstehen des *Flows* hat die Aufmerksamkeit, da sie entscheidet, welche Informationen aufgenommen werden. Sie wird durch die Interessen des Individuums gelenkt. Wie schon oben angedeutet, ist der *Flow*-Zustand eng mit intrinsischer Motivation verbunden. Er wirkt intrinsisch befriedigend, wodurch das Individuum die Aktivität beharrlich ausübt und immer wieder in den Zustand gelangen will. Das führt dazu, dass es die Aktivität wiederholen wird, den Schwierigkeitsgrad aber anpassen muss, um die optimale Herausforderung zu erhalten. Somit steigern sich die individuellen Fähigkeiten Schritt für Schritt (Nakamura & Csikszentmihalyi, 2014, S.89-92). Nakamura und Csikszentmihalyi fassen dies nochmal zusammen: „The flow experience is thus a force for expansion in relation to the individual's goal and interest structure, as well as for growth of skills in relation to an existing interest“ (Nakamura & Csikszentmihalyi, 2014, S.92).

Einige Studien bestätigen diesen Zusammenhang von *Flow* und Lernprozess. So wurde der *Flow* mit der Leistungsbereitschaft und der Leistung von High-School-Schülern assoziiert und ein Zusammenhang zwischen der Qualität einer Erfahrung und der Beharrlichkeit in einer Aktivität nachgewiesen. Ein Zusammenhang mit dem Selbstwertgefühl wird vermutet. Wie weiter oben schon erwähnt wurde, stellen die optimale Herausforderung, ein klares und sofortiges Feedback sowie klare Ziele wichtige Bedingungen für die *Flow*-Erfahrung dar. Hinzu kommt die Umwelt eines Individuums als weiterer Faktor. Sie sollte das Individuum mit Herausforderungen konfrontieren, ihm aber auch ausreichend Unterstützung anbieten (Nakamura & Csikszentmihalyi, 2014, S.97ff).

Ein direkter Einfluss auf den *Flow*-Zustand ist nicht möglich. Vielmehr geht es darum, Anreize zu schaffen und ihnen dabei zu helfen, ihre Aufmerksamkeit zu lenken: „their goal is not to foster the state of flow directly but rather help individuals identify activities that they enjoy and learn how to invest their attention in these activities“ (Nakamura & Csikszentmihalyi, 2014, S.100).

Im Folgenden werden einige Motivationskonzepte vorgestellt, die wichtige Implikationen für den Lernprozess haben. Einige dieser Konzepte überschneiden sich zum Teil mit der Selbstbestimmungstheorie von Deci und Ryan.

Das Selbstwertkonzept geht davon aus, dass sich Menschen als kompetent wahrnehmen möchten und auch dadurch motiviert werden, ganz nach dem Motto „to be worthy is to be able“ (Graham & Weiner, 1996, S.73). Sie suchen die Gründe für Versagen in externen Faktoren, die unabhängig von ihren eigenen Fähigkeiten sind und verwenden Selbstschutzstrategien, um Enttäuschungen zu vermeiden. So stecken sie sich zum Beispiel zu hohe Ziele oder strengen sich nicht an, um ihr Versagen darauf zurückführen zu können (Graham & Weiner, 1996, S.73).

Im Selbstwirksamkeitskonzept wird der Grad an Motivation durch die Überzeugungen eines Individuums hinsichtlich seiner eigenen Fähigkeiten bestimmt. Ist man von seinen Fähigkeiten überzeugt, so bleibt man hartnäckig und beständig beim Lösen einer Aufgabe. Empirisch konnte belegt werden, dass sich die eigenen Überzeugungen unter anderem auf das Leistungsverhalten, die Schmerztoleranz, die Stressbewältigung und die Angst auswirken. Ebenso gibt es einen Zusammenhang zwischen den Überzeugungen und dem Erwerb neuer Fähigkeiten, der Leistung, die mittels kurz zuvor gelernter Fähigkeiten erbracht wird sowie dem Verhalten und Verhaltensänderungen (Graham & Weiner, 1996, S.75).

Der Zustand der Hilflosigkeit beschreibt einen Zustand, in dem ein Individuum keinen Zusammenhang zwischen dem eigenen Verhalten und dem Handlungsergebnis erkennen kann und somit der Überzeugung ist, keinen Einfluss auf das Ergebnis zu haben. Versagen erscheint ihm dadurch unvermeidlich und Ereignisse unkontrollierbar. Diese Hilflosigkeit wurde durch die Generalisierung einer Erfahrung erlernt, weswegen man von erlernter Hilflosigkeit spricht. Effekte, die den Zustand der Hilflosigkeit begleiten sind Passivität, Motivationslosigkeit, ein depressiver Affekt und schlechtere Leistung.

Im Zusammenhang mit diesem Konzept werden zwei Erklärungsstile von Individuen unterschieden, durch die sie ihr Scheitern begründen. Ein pessimistischer Erklärungsstil macht interne, stabile und globale Gründe für das Scheitern verantwortlich, während ein optimistischer Erklärungsstil den Grund in externen, instabilen und spezifischen Faktoren sieht. Kinder, die einen pessimistischen Erklärungsstil haben, weisen mehr Verlust an Selbstwertgefühl auf und sind anfälliger dafür, sich hilflos zu fühlen, im Gegensatz zu Kindern mit einem optimistischen Erklärungsstil. Zudem ließ sich eine positive Korrelation mit schlechten Schulnoten nachweisen und es zeigte sich, dass die Kinder weniger nach

Hilfe suchten, ein geringeres Anspruchsniveau hatten, ihre Leistungsziele nicht klar definierten und Lernstrategien nicht effektiv verwendeten.

Weiterhin wird zwischen *helpless* und *mastery-orientated* Kindern unterschieden. In verschiedenen Experimenten zeigte sich, dass Kinder mit den gleichen Fähigkeiten auf Aufgaben, bei denen sie scheitern könnten, auf zwei Arten reagierten: entweder mit Hilflosigkeit oder *mastery-orientated*. Im ersten Fall liegt der Fokus auf persönlichen Defiziten, das Scheitern wird fehlendem Können zugeschrieben. Diese Reaktion geht einher mit Langeweile, Angst und einer Verschlechterung der Leistung. Im zweiten Fall liegt der Fokus auf der Aufgabe. Die Kinder machen meist gar keine Zuschreibungen in Bezug auf das Scheitern, zeigen positive Gefühle, Freude an der Herausforderung und entwickeln lösungsorientierte Strategien, um sich zu verbessern.

Ein Grund für diese zwei völlig unterschiedlichen Arten mit Herausforderungen umzugehen, wird in verschiedenen impliziten Theorien über das Können und die eigenen Fähigkeiten gesehen. Demnach begreifen manche Menschen Können als etwas Unveränderbares und Unkontrollierbares (*entity-theorists*), während andere überzeugt davon sind, dass sie Einfluss auf ihr Können haben und es verändern und verbessern können (*incremental-theorists*). Letztere streben nach Herausforderung, wogegen erstere sie meiden. Auch unterscheiden sie sich hinsichtlich ihrer Ziele. *Entity-theorists* verfolgen Leistungsziele, das heißt, ihr Ziel ist es, Können zu zeigen und Nicht-Können zu verstecken. *Incremental-theorists* hingegen haben Lernziele, das heißt, ihr Hauptziel ist es, die Aufgabe zu meistern und neue Fähigkeiten zu erlernen (Graham & Weiner, 1996, S.75ff).

Große Ähnlichkeiten zu dieser Unterscheidung hat das Konzept, das *task involvement* und *ego involvement* unterscheidet. *Task involvement* bedeutet, dass es als Selbstzweck gesehen wird, die Aufgabe zu meistern und ein besseres Verständnis zu bekommen sowie neue Fähigkeiten zu erwerben. *Ego involvement* heißt, dass man beim Bearbeiten einer Aufgabe damit beschäftigt ist, sich gegenüber anderen zu beweisen und schlechtes Können zu verbergen. Es konnte nachgewiesen werden, dass Schüler, die aufgabenorientiert waren, Versagen seltener auf geringes Können zurückführten, stolzer auf Erfolg waren, der aus Anstrengung hervorging, eher Interesse zeigten und bessere Leistung erbrachten als Kinder, die auf sich selbst konzentriert waren. Es wird angenommen, dass erstere mehr an die Wirksamkeit von Anstrengung glauben und für sie Erfolg Können bedeutet, auch wenn sie sich dafür anstrengen mussten. Dabei ist ihnen egal, ob andere für denselben Erfolg die gleiche Anstrengung aufbringen mussten. Letztere dagegen sind davon überzeugt, dass ihr

Können nur durch den Vergleich mit anderen, ihrer Anstrengung und ihren Ergebnissen, bewertet werden kann (Graham & Weiner, 1996, S.77).

4.2. Motivation und Lernen

An manchen Stellen wurden Hinweise auf einen Zusammenhang zwischen Motivation und Lernen schon vorweggenommen. Dieser Zusammenhang soll an dieser Stelle nochmals betont und erläutert werden. Deci und Ryan sowie Graham und Weiner sehen in der Motivation eine zentrale Bedingung für den Lernprozess:

> „sie [die Motivation] ist wesentliche Grundlage für den Erwerb kognitiver Fähigkeiten und bestimmt zugleich die Entwicklung des individuellen Selbst“ (Deci & Ryan, 1993, S.235)

> „Motivational factors influence particular cognitive processes, such as encoding of information or attention deployment, and that these information processing components then more directly influence performance” (Graham & Weiner, 1996, S.81)

Motivationstheorien und -konzepte können dabei helfen, Regeln zu formulieren, um den Lernprozess zu fördern (Graham & Weiner, 1996, S.63). In einigen Studien konnte gezeigt werden, dass die Qualität des Lernens dadurch beeinflusst wir, ob Motivation selbstbestimmt ist oder von externen Faktoren abhängt. Die auf Selbstbestimmung beruhende Lernmotivation hat positive Wirkung auf die Qualität des Lernens, Interesse (ein Zeichen intrinsischer Motivation) korreliert positiv mit Lernqualität. Zudem korreliert diese Art der Motivation positiv mit Daten aus objektiven und subjektiven Leistungsmessungen. Weiterhin wurde nachgewiesen, dass introjizierte Regulation mit Schulangst und schlechter Bewältigung von Misserfolgen zusammenhängt, wohingegen identifizierte Regulation mit Interesse, Freude an der Schule und einer guten Bewältigung von Misserfolgen zusammenhängt. Ebenso setzten sich Schüler in autonomieunterstützenden Umgebungen intensiver mit dem Lernstoff auseinander, was zu einer höheren Qualität des Lernens und besserer Leistung führt. Schüler in kontrollierenden Lernumgebungen zeigten schwächere Leistung und weniger Interesse (Deci & Ryan, 1993, S.233ff).

Die Frage, wie man Motivation für den Lernprozess nutzen kann, stellt sich an dieser Stelle. Wie gerade erläutert wirkt sich selbstbestimmte Motivation positiv auf den Lernprozess und die Lernergebnisse aus. Somit kann durch Maßnahmen, die selbstbestimmte Motivation fördern, auch ein selbstbestimmter Lernprozess gefördert werden und effektives Lernen entstehen. Die soziale Umgebung sollte also so gestaltet sein, dass intrinsische bzw. integrierte extrinsische Motivation gefördert wird. Das heißt, sie sollte eine Befriedigung der psychologischen Bedürfnisse der Lernenden ermöglichen. Dies umfasst die Unterstützung von Autonomie und die Möglichkeit, individuelle Kompetenzen und Selbstwirksamkeit zu erfahren. Dazu gehört z. B. auch, dass Handlungen frei gewählt werden können und wichtige Bezugspersonen Anteil am Lernprozess nehmen. Ebenso wichtig sind informative Belohnungen sowie ein informatives Feedback (Deci & Ryan, 1993. S.233ff).

Auch aus den Konzepten zu Selbstwert, Selbstwirksamkeit, erlernter Hilflosigkeit und *task-involvement* können Schlüsse für die Gestaltung der Lernumgebung gezogen werden. Um das Selbstwertgefühl zu stärken, sollten Belohnungen maximiert und Bestrafungen minimiert werden, wobei natürlich auf die richtige Art der Belohnung zu achten ist. In einigen Studien wurden Methoden identifiziert, die den Glauben an die eigenen Fähigkeiten und somit das Gefühl der Selbstwirksamkeit förderten. Dazu gehört das Setzen eher kurzfristiger als langfristiger Ziele, wodurch der Lernende seinen Fortschritt besser beurteilen kann und das Anwenden spezifischer Lernstrategien wie z. B. Skizzen (Graham & Weiner, 1996, S.74f).

Um dem Zustand der Hilflosigkeit entgegenzuwirken, nennen Graham und Weiner eine ganze Reihe von Maßnahmen: „increasing success expectancies, altering attributions for failure from stable to unstable, changing reward practices in the classroom to emphasize their informational rather than controlling aspect, and altering the perception of ability so that ability is seen as unstable rather than stable" (Graham & Weiner, 1996, S.81).

Um *task-involvement* zu fördern sollte ein aufgabenfokussierter Kontext geschaffen und ein egofokussierter Kontext vermieden werden. Hierfür sind die Betonung der persönlichen Ausführung und das Verwenden von Aufgaben mittleren Schwierigkeitsgrades wichtig. Eine starke Bewertungssituation und Betonung auf den Vergleich zu anderen sollten umgangen werden (Graham & Weiner, 1996, S.77). Aufgaben mittleren Schwierigkeitsgrades sind auch in Atkinsons Leistungstheorie und für die Erhaltung des *Flows* von Bedeutung. Um *Flow*-Erfahrungen zu ermöglichen sollte außerdem eine adäquate Lernumgebung geschaffen werden. In dieser sollte Schülern geholfen werden, Interessen zu entdecken und Fähigkeiten zu entwickeln, um *Flow*-Zustände zu erleben (Nakamura & Csikszentmihalyi, 2014, S.99).

4.3. Motivation im Lernspiel Ganita

Wie im vorherigen Kapitel erläutert, ist Motivation vor allem dann für den Lernprozess förderlich, wenn sie durch Selbstbestimmung gekennzeichnet ist. Da es in Ganita keine materiellen Belohnungen und Strafen gibt, und die Schüler keiner permanenten Bewertung und Leistungsdruck oder -kontrolle ausgesetzt sind, da sie sich in einer Spielsituation befinden, wird die intrinsische Motivation nicht untergraben. Das Fehlen einer Bestrafung wirkt sich zudem positiv auf den Selbstwert der Spieler aus. Die intrinsische Motivation wird durch verschiedene Spielkomponenten gestärkt. So zeichnet sich das Spiel in mehrfacher Hinsicht durch Wahlfreiheit aus. Die Spieler dürfen sich nach jedem Würfeln entscheiden, in welche Richtung sie mit ihrer Spielfigur laufen und somit auch, aus welcher Kategorie sie eine Aufgabe lösen möchten. Außerdem können sie einen eigenen Lösungsweg finden, um eine Aufgabe zu bearbeiten oder, falls es mehrere mögliche Lösungen gibt, zählt jede richtige Lösung, die die Spieler gefunden haben. So lassen z. B. folgende Aufgaben mehrere richtige Lösungen zu:

> „Um diese Karte zu gewinnen, findet eine andere Darstellung für diese Zahl:
> 0.125“

> „Um diese Karte zu gewinnen, …
> …müsst ihr eine Rechenaufgabe (mit +, -, •, :) und den Zahlen 3, 5, 7 stellen,
> bei der das Ergebnis 8 herauskommt.“

Insbesondere bei den Pantomime-, Erklär- und Zeichenaufgaben können die Schüler frei entscheiden, wie sie etwas pantomimisch darstellen, erklären oder zeichnen möchten.

Selbstbestimmte Motivation wird durch das Erleben von Kompetenz, Selbstwirksamkeit und durch die Unterstützung der Autonomie der Schüler gefördert. Informatives Feedback führt zum Erleben von Kompetenz. Auch Ganita bietet eine informative Rückmeldung. Einerseits durch die Mitspieler, die Rückmeldung auf der Basis ihrer Kenntnisse geben und durch den Lehrer, der während des Spiels zu Rate gezogen werden kann. Andererseits sind auf den Aufgabenkarten die Lösung oder Lösungsbeispiele, zum Teil mit einer Erklärung auf der Karte selbst oder im Lexikon, abgedruckt. Eine Erklärung gibt es meist, wenn es sich um komplexere Aufgaben handelt, bei denen mögliche Fehlerquellen nicht nur aus einfachen Rechenfehlern bestehen.

Die Ziele in Ganita sind kurzfristig und von den Spielregeln vorgegeben. In jeder Runde hat ein Team zum Ziel, die Aufgaben richtig zu lösen und so viele Karten wie möglich zu gewinnen. Das Anwenden spezifischer Lernstrategien wird durch die Tipps, die teilweise auf den Aufgabenkarten zu finden sind, sowie durch die kooperative Komponente und den Einsatz von Materialien wie Papier und Stift ermöglicht. Ein Beispiel hierfür wären folgende Aufgaben:

> „Um diese Karte zu gewinnen, löst folgende Aufgabe:
> 3 Würfel liegen übereinander, sodass oben eine 2 ist. Wie viele Augen kann
> man nicht sehen?
> Tipp: Man kann den Würfelturm drehen.“

„Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:
Was ergibt 2^{-1}?
Tipp: $2^3 = 8$, $2^2 = 4$, $2^1 = 2$. Überlege dir wie du zur niedrigeren Potenz gelangst.“

Die erste Aufgabe gibt dem Spieler den Tipp, visuelle Strategien anzuwenden und sich den Turm im Raum vorzustellen und ihn zu drehen. Der zweite Tipp rät dem Spieler, induktiv vorzugehen und von den schon ihm bekannten Potenzen auf eine allgemeine Regel rückzuschließen. Diese Faktoren fördern das Selbstwirksamkeitserleben der Spieler, das ebenfalls zur intrinsischen Motivation beiträgt.

Das Autonomieempfinden der Spieler wird in Ganita durch die Lebensweltbezüge und Förderung verschiedener Interessen unterstützt (vgl. Kapitel 4.1). Durch den Bezug vieler Aufgaben zum Alltag oder der realen Welt wird der Kontext für die Spieler bedeutsam. Die Aufgaben zeigen ihnen die Relevanz der Mathematik auf und lassen sie erkennen, warum es wichtig ist, Mathematik zu lernen. Dadurch wird die Bewältigung der Aufgaben als selbstbestimmtes Ziel internalisiert und die Motivation selbstbestimmt.

Das Miteinbinden anderer Fächer und nicht-mathematischer Themen in die Aufgabenstellungen sowie das Lexikon fördern das intrinsische Interesse der Schüler und ihre wahrgenommene Kompetenz. So fühlt sich ein Schüler beim Lösen reiner mathematischer Aufgaben vielleicht nicht kompetent, hat aber im Fach Geographie gute Leistungen und ein hohes Kompetenzerleben. Aufgaben in denen auch geographisches Wissen hilfreich sein kann oder vorkommt, steigern womöglich auch sein Kompetenzerleben im mathematischen Teil der Aufgabe. Ein Beispiel hierfür sind folgende Aufgaben:

„Um diese Karte zu gewinnen, schätzt die Antwort auf diese Frage:
Wie hoch ist der höchste Berg der Welt?“

„Um diese Karte zu gewinnen, schätzt die Antwort auf diese Frage:
Wie weit sind der nördlichste und der südlichste Punkt Deutschlands voneinander entfernt? (Luftlinie)“

Den Spielern die Möglichkeit zu geben, Interessen zu entdecken, spielt auch für die Erreichung des *Flow*-Zustandes eine wichtige Rolle. Weiterhin sollten die Aufgaben eine optimale Herausforderung darstellen. Wie schon in Kapitel 2 erwähnt, orientieren sich die Aufgaben zum großen Teil am Bildungsplan und sollten somit dem Niveau der Schüler angepasst sein. Es gibt ein paar schwierigere Aufgaben, die aber den *Flow* nicht stören sollten, da sie nur vereinzelt vorkommen und wichtig für die stärkeren Schüler sind. Zudem hat der Lehrer die Möglichkeit, die Karten zu sortieren und bestimmte Aufgaben wegzulassen oder hinzuzufügen und den Schwierigkeitsgrad somit an die jeweilige Klasse anzupassen.

Der Lehrer und das Spiel selbst können die Spieler beim Bewältigen der Herausforderungen unterstützen. Das Spiel unterstützt die Schüler durch die Tipps auf den Aufgabenkarten und das Lexikon. Im optimalen Fall nimmt auch der Lehrer eine unterstützende Rolle an, indem er den Schülern Hinweise gibt und immer für Fragen bereitsteht. Ganita erfüllt auch die Bedingung klarer Ziele, die durch die Spielregeln formuliert sind, und eines sofortigen Feedbacks durch die kooperative Lernstruktur. Beim Lösen einer Aufgabe geben sich die Spieler eines Teams immer sofortiges Feedback und auch nach dem Lösen erhalten sie klares Feedback durch die Lösung auf der Karte und die gegnerischen Teams.

Ein weiterer Faktor, der häufig in Bezug auf den *Flow* genannt wird, ist die Adaptivität des Spiels. Ein Spiel, das viele Anpassungsmöglichkeiten bereitstellt, trägt zum *Flow* der Spieler bei (Breuer & Bente, 2010, S.12; Lämsä et al., 2018, S.602). Auch wenn in Ganita nicht während des Spiels der Schwierigkeitsgrad an den Fortschritt der Spieler angepasst werden kann, so gibt es, wie schon weiter oben erwähnt, die Möglichkeit, das Spiel an die Klasse durch sortieren der Aufgabenkarten anzupassen. Auch eine gemeinsame Weiterentwicklung und Anpassung des Lehrers mit den Schülern ist möglich.

Ein Zustand der Hilflosigkeit ist nachteilig für den Lernprozess und -erfolg. Vielmehr sollten Lernende *mastery-orientated* denken und ihr Können nicht als statisch betrachten. Dazu tragen höhere Erfolgserwartungen bei, die bei Ganita wahrscheinlicher als im sonstigen Matheunterricht oder in einem Test sind, da es den Schülern im Spielkontext einfacher erscheint, Erfolg zu haben. Indem sie die Möglichkeit haben, sich im Spiel zu verbessern und z. B. nach dem Lesen eines Lexikonartikels eine Aufgabe zu lösen, wird die Wahrnehmung des Könnens als etwas Veränderbares gefördert.

Auch wird von den Spielern mit Fehlern gerechnet. Das Spiel wäre langweilig, wenn jede Aufgabenkarte richtig gelöst wird. Scheitern wird somit weniger wahrscheinlich auf stabile Gründe zurückgeführt. Das Begehen von Fehlern zieht keine schlimmen Konsequenzen nach sich, was die Risikobereitschaft der Spieler steigert, neue Strategien und Lösungswege auszuprobieren. Plass und Homer sprechen in diesem Zusammenhang von *graceful failure* (Jan L. Plass et al., 2015, S.261). Einige Aufgabenkarten sind schwierig und reichen über die Schulmathematik hinaus. Im Folgenden einige Beispiele:

> „Um diese Karte zu gewinnen, …
> …denke dir eine Methode bzw. Darstellung der rationalen Zahlen aus, mit der du alle rationalen Zahlen abzählen kannst.“
>
> „Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:
> Von welchen Ecken aus kann man das Haus vom Nikolaus zeichnen, ohne den Stift abzusetzen?“
>
> „Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage (richtig) mit ‚ja‘ oder ‚nein‘:
> Kann ich von jedem Punkt aus in einem Donut zu einem beliebigen anderen Punkt gelangen und dabei immer innerhalb des Donuts bleiben? Ich will dabei den kürzesten Weg nehmen.“

Die Spieler haben bei diesen Aufgaben die Möglichkeit, sich Herausforderungen zu stellen, die sie sonst womöglich gemieden hätten, und zu lernen, dass sie nicht jede Aufgabe sofort erfolgreich meistern müssen, sondern, dass es normal ist (und den besten Mathematikern passiert), lange über etwas nachdenken zu müssen und auf dem Weg dorthin viele Fehler und Irrwege zu begehen. Die schwierigen Aufgaben bieten zudem Gelegenheit zu erkennen, dass man, auch wenn man die Aufgabe nicht richtig löst, etwas lernt. Dazu trägt der Spielkontext bei, indem Fehler keine schlimmen Folgen haben und den Schülern somit die Angst vor dem Scheitern genommen wird. Auch die kooperative Struktur und die damit einhergehende gegenseitige Unterstützung kann dazu beitragen, dass sich die Schüler mehr zutrauen und weniger Angst davor haben, Fehler zu begehen. Fehler werden dadurch eher als Herausforderung wahrgenommen, die es zu überwinden gilt. Somit tragen auch die schwierigen Aufgaben dazu bei, eine *mastery-orientated* Denkweise zu fördern.

Ein egofokussierter Kontext wird durch die Spielstruktur eher vermieden, da die Spieler zusammenarbeiten und sich nicht vergleichen. Zudem sind sie keiner Bewertungssituation ausgesetzt. Das Bearbeiten der Aufgaben steht durch das Spielprinzip im Fokus. Auch der im Allgemeinen mittlere Schwierigkeitsgrad der Aufgaben trägt zum *task-involvement* der Spieler bei.

Belohnungen und Anreize, wie z. B. ein Punktesystem, werden von einigen Autoren als motivationsfördernd genannt (Boyle et al., 2016, S.22; Lämsä et al., 2018, S.603; Jan L. Plass et al., 2015, S.263). Nachdem auch immer wieder in den Unterrichtsbesuchen nach einem Punktesystem gefragt wurde, wurde dieses in die Spielregeln mitaufgenommen. Jedes Team erhält nun für jede richtig gelöste Aufgabe einen Punkt. Ganita hat zudem ein ansprechendes Design, das sich durch seine Farben und mathematischen Darstellungen auszeichnet. Wir konnten während der Unterrichtsbesuche beobachten, dass die Spielfiguren von den meisten Schülern als amüsant und interessant bewertet wurden. Auch die Rückmeldungen auf den Fragebögen zeigen, dass den Spielern die Spielfiguren gefallen haben. Diese visuellen Aspekte steigern laut Lämsä und Hämäläinen, Plass und Homer, Boyle und Hainey die Motivation (Boyle et al., 2016, S.22; Lämsä et al., 2018, S.603; Jan L. Plass et al., 2015, S.263). Durch Zeitdruck, der in Ganita durch die Sanduhr entsteht, werden die Spieler ebenfalls zum Spielen motiviert (Lämsä et al., 2018, S.603).

Auch die Unterrichtsbesuche, in denen das Spiel getestet wurde, weisen auf eine hohe (intrinsische) Motivation und ein *Flow*-Erleben der Spieler hin. Intrinsische Motivation wird durch die Dauer, die sich ein Individuum mit einer Aktivität (ohne externe Belohnung) beschäftigt sowie Ratings über die in der Aktivität empfundene Freude und empfundenes Interesse erfasst (Deci & Ryan, 1993, S.225f). In den Fragebögen wurde „Spaß“, also das Empfinden von Freude, als häufigste Antwort auf die Frage, warum ihnen das Spiel gefällt, genannt. Auch zeigten sie oft Interesse an den Themen, die im Spiel auftauchen und wollten das Spiel länger und öfter spielen. Dies gibt einen Hinweis darauf, dass die Schüler intrinsisch motiviert waren. Folgendes Zitat weist auf ein *Flow*-Erleben hin: „Man lern etw. ohne es zu bemerken“. Der Schüler war so in das Spiel eingebunden, dass er den Lernprozess nicht mehr wahrgenommen bzw. ihn nicht als unangenehm empfunden hat.

5. Epistemologische Überzeugungen

5.1. Theoretische Grundlagen

5.1.1. Epistemologische Überzeugungen

Im Dorsch Lexikon der Psychologie werden epistemologische Überzeugungen als „Annahmen einer Person über die Herkunft, Gewissheit, Struktur und Rechtfertigung von Wissen“ (Wirtz & Strohmer, 2014, S. 505) definiert. Diese Definition orientiert sich an der Kategorisierung von Hofer und Pintrich (Hofer & Pintrich, 1997). Epistemologische Überzeugungen hinsichtlich verschiedener Bereiche werden übereinstimmend auf einem Kontinuum zwischen naiven und komplexen bzw. differenzierten Überzeugungen eingeordnet. Die naive Sichtweite betrachtet Wissen als absolut, während die komplexe Sichtweise davon ausgeht, dass Wissen komplex und unsicher, d.h. fehlbar, ist. Vor allem die älteren Modelle zu epistemologischen Überzeugungen nehmen an, dass sich die Überzeugungen von Individuen über die Zeit hinweg von einer naiven hin zu einer komplexen Perspektive entwickeln (Kienhues, Bromme, & Stahl, 2008, S.546).

Diese Modelle gehen von Entwicklungsstufen aus und haben lange die Forschung zu epistemologischen Überzeugungen dominiert. Sie sehen Überzeugungen als eng miteinander zusammenhängend, die sich durch neue Erfahrungen weiterentwickeln und dabei verschiedene Stufen erreichen (Kienhues et al., 2008, S.547). Vertreter dieses Ansatzes ist William Perry, der mit seinem Modell eine Grundlage und den Ausgangspunkt für weitere Forschung schuf.

Perry unterteilt epistemologische Überzeugungen in vier Entwicklungsstufen: Dualismus, Multiplismus, Relativismus und Bekenntnis im Relativismus. Die Stufen reichen von naiven (Dualismus) bis hin zu komplexen (Bekenntnis im Relativismus) Überzeugungen. Auf der ersten Stufe wird die Welt in richtig und falsch eingeteilt. Es handelt sich also um ein dualistisches und absolutistisches Weltbild. Autoritäten sind die einzigen Wissensquellen, die über die gesamte und absolute Wahrheit verfügen. Multiplistische Überzeugungen entfernen sich von der Annahme, dass Autoritäten allwissend sind und Wahrheit absolut ist. Wissen kann unsicher und divers sein. Im Relativismus sieht sich das Individuum selbst als Wissensquelle. Wissen ist dabei relativ, ungewiss und vom Kontext abhängig. Auf der letzten Stufe liegt der Fokus auf der Verpflichtung und Verantwortung des Individuums. Individuen erkennen ihre Verpflichtungen in Bezug auf Werte, Karrieren, Beziehung und in Bezug auf die persönliche Identität an und nehmen folglich bewusst eine Position ein, obwohl auch andere möglich wären. Sie bekennen sich also zu einer Position.

Perrys Schema bezieht sich auf College-Studenten und wurde auch anhand dieser getestet. Es repräsentiert somit die epistemologischen Überzeugungen einer speziellen Gruppe in einem speziellen Kontext (Bildungskontext). Die letzte Entwicklungsstufe (Bekenntnis im Relativismus) konnte in seinen Studien nicht nachgewiesen werden (Hofer & Pintrich, 1997, S.91).

Ein weiteres Modell ist Magoldas *Epistemological Reflection Model*, das dem Perrys ähnelt. Auch sie unterteilt epistemologische Überzeugungen in vier Stufen, die sie *ways of knowing* nennt. Auf der ersten Stufe (*absolute knowing*) befinden sich Personen, die Wissen als sicher und Autoritäten als allwissend betrachten. Auf der zweiten Stufe (*transitional knowing*) hingegen, werden die Allwissenheit der Autoritäten sowie die absolute Sicherheit des Wissens angezweifelt. Individuen auf der dritten Stufe (*independent knowing*) ziehen andere Wissensquellen als nur Autoritäten in Betracht und gehen davon aus, dass auch eigene Meinungen gültig sein können. Es zählen also nicht mehr nur externe Faktoren als Wissensquelle. Auf der letzten Stufe (*contextual knowing*) gilt Wissen als etwas, das sich entwickelt und verändert und ständig durch neuen Kontext und neue Nachweise rekonstruiert wird. Individuen können sich eine eigene und valide Perspektive durch die Beurteilung von Nachweisen bilden.

Magolda erweitert das Modell Perrys vor allem durch ihre Untersuchungen hin auf mögliche Geschlechterunterschiede. Dabei konnte sie keine Unterschiede von Männern und Frauen im Hinblick auf die *ways of knowing*, aber geschlechtsbezogene Argumentationsmuster für die ersten drei Stufen feststellen (Hofer & Pintrich, 1997, S.98).

Schommer verfolgt mit ihrem Konzept einen neuen Ansatz, der nicht mehr auf verschiedenen Entwicklungsstufen epistemologischer Überzeugungen basiert, sondern diese in verschiedene Dimensionen einteilt. Diese sind Struktur, Stabilität und Quelle von Wissen sowie Kontrolle und Geschwindigkeit des Wissenserwerbs (Wirtz & Strohmer, 2014, S.505). Die Dimensionen sind, im Gegensatz zu den Entwicklungsstufen, unabhängig voneinander und heterogen. Ein Individuum kann also sowohl komplexe, als auch naive epistemologische Überzeugungen in verschiedenen Dimensionen haben (Kienhues et al., 2008, S.547).

Jede Dimension kann auf einem Kontinuum zwischen einer naiven Perspektive an einem Extrem und einer komplexen Perspektive am anderen Extrem betrachtet werden. Die Struktur von Wissen kann als einfach und isoliert oder komplex und zusammenhängend aufgefasst werden. Hinsichtlich der Stabilität wird Wissen als sicher oder vorläufig eingeschätzt und hinsichtlich der Wissensquelle werden entweder externe Quellen oder persönliche Erfahrungen anerkannt. In Bezug auf den Wissenserwerb bewegt sich das

Kontinuum zwischen der Annahme, dass Wissen schnell und einfach, und der, dass Wissen schrittweise und mit Anstrengung verbunden, erworben wird. Die Fähigkeit zu lernen wird als fest oder sich über die Zeit hinweg entwickelnd aufgefasst (Buehl & Alexander, 2005, S.699).

Für die naive Perspektive in den jeweiligen Dimensionen formulierte Schommer Item-Untergruppen, um die Überzeugungen messen zu können. Für die Überzeugung, die Fähigkeit sei etwas festes und Intelligenz nicht veränderbar, ließen sich drei Item-Untergruppen bestimmen: „Can't Learn How to Learn […], Success Is Unrelated to Hard Work […], Learn the First Time [d.h. das meiste wird gelernt, wenn man sich das erste Mal mit einem Thema befasst]“ (Hofer & Pintrich, 1997, S.107). Hier kann ein Zusammenhang zu den Motivationskonstrukten *helplessness* und *mastery-orientation* festgestellt werden. Die Überzeugung, dass der Wissenserwerb schnell stattfindet, enthält die Item-Untergruppe „Learning is Quick“ (Hofer & Pintrich, 1997, S.107), die, dass Wissen einfach ist, die Item-Gruppen „Avoid Ambiguity […], Seek Single Answers […], Avoid Integration“ (Hofer & Pintrich, 1997, S.107) und die, dass Wissen sicher ist, die Item-Gruppe “Knowledge Is Certain” (Hofer & Pintrich, 1997, S.107). Die Dimension der Wissensquelle konnte von Schommer nicht als Faktor nachgewiesen werden, sie nimmt aber an, dass sich diese Dimension auf einem Kontinuum zwischen Autorität und Begründung bzw. Argumentation bewegt. Eine weitere Besonderheit ihres Modells ist die Fokussierung des Zusammenhangs von epistemologischer Überzeugungen mit dem Verständnis und akademischer Leistung (Hofer & Pintrich, 1997, S.106f).

Hofer und Pintrich (1997) stellten fest, dass sich alle Modelle, sowohl die Entwicklungsstufenmodelle als auch die Modelle mit mehreren Dimensionen, auf die Natur des Wissens und auf den Wissensprozess beziehen. Fast alle Dimensionen können in diese beiden Bereiche eingeordnet werden, weswegen Hofer und Pintrich davon ausgehen, dass sie die Kernstruktur epistemologischer Theorien darstellen. Sie schlagen vier Dimensionen vor, von denen sie jeweils zwei den Bereichen *nature of knowledge* und *nature of knowing* zuordnen.

Im Bereich *nature of knowledge* finden sich die Dimensionen „Sicherheit von Wissen“ und „Einfachheit von Wissen“, in dem Bereich *nature of knowing* die Dimensionen „Wissensquelle“ und „Rechtfertigung von Wissen“. In den ersten Bereich werden Vorstellungen darüber, was Wissen überhaupt ist, eingeordnet. In den Entwicklungsstufenmodellen bewegen sich diese Vorstellungen auf einem Kontinuum zwischen absolutistischem Wissen und kontextuellem Wissen, Schommer unterteilt die

Vorstellungen in die Dimensionen Struktur und Stabilität von Wissen. In den zweiten Bereich werden Auffassungen darüber eingeordnet, wie eine Person Wissen erlangt. Dabei werden Wissensquellen (externe Autoritäten vs. das Selbst in Interaktion mit der Umwelt) und Rechtfertigung für Wissen (dualistische vs. multiplistische Perspektive), d.h. die Bewertung von Nachweisen, die Rolle von Autoritäten und der Verlauf von Rechtfertigungsprozessen, betrachtet (Hofer & Pintrich, 1997, S.118ff).

Eine offene Fragestellung ist, ob epistemologische Überzeugungen fächerübergreifend oder fächerspezifisch sind. Die zunehmende Annahme in der Forschung ist, dass es sowohl allgemeine und fächerübergreifende als auch spezifische epistemologische Überzeugungen, die je nach Fach bzw. Bereich variieren, gibt (Hofer & Pintrich, 1997, S.125; Kienhues et al., 2008, S.548). Fächerübergreifende Überzeugungen werden als stabiler, fachspezifische als variabler angenommen (Kienhues et al., 2008, S.548), wobei sie gemeinsam ein zusammenhängendes Netzwerk bilden (Hofer & Pintrich, 1997, S.126).

Buehl und Alexander (2005) untersuchten in ihrer Studie den Zusammenhang epistemologischer Überzeugungen in den Fächern Mathematik und Geschichte mit der Motivation und Leistung von Studenten. Unterschiedliche Überzeugungen lassen sich vermuten, da sich die Fächer in ihrer Struktur und in den Lösungsstrategien unterscheiden. Während bei Geschichtsaufgaben oft flexibles Denken verlangt wird, werden bei Mathematikaufgaben häufig spezifische Algorithmen verwendet. Buehl und Alexander konnten zwei Überzeugungsfaktoren in jedem Fach feststellen. Schüler wiesen Überzeugungen hinsichtlich Integration von Wissen in dem jeweiligen Fach und Überzeugungen dazu, wie viel Anstrengung gebraucht wird, um Wissen zu erwerben, auf. Die Komplexität und Naivität der Überzeugungen war zum Teil konsistent, aber auch unterschiedlich, woraus die Autoren folgern, dass epistemologische Überzeugungen sowohl fächerübergreifend als auch fächerspezifisch sind (Buehl & Alexander, 2005).

Auch der Zusammenhang von epistemologischen Überzeugungen mit Lernprozessen und -ergebnissen wird zunehmend untersucht. Viele Autoren nehmen an, dass sich die Überzeugungen über Wissen auf den Gebrauch von Lernstrategien und auf bestehende Konzepte auswirken, was wiederum zu Veränderungen im Lernprozess, in der Kognition und somit der akademischen Leistung führt (Buehl & Alexander, 2005, S.698; Hofer & Pintrich, 1997, S.127).

Komplexe epistemologische Überzeugungen stehen im Zusammenhang mit positiven Lernergebnissen, während naive Überzeugungen mit negativen Lernergebnissen in Zusammenhang stehen. So führen komplexere Überzeugungen zu einer besseren Planung von Lernprozessen, einer umfassenderen Verarbeitung von Informationen und einer differenzierteren Argumentation und haben somit positiven Einfluss auf die Informationsverarbeitung von Individuen (Wirtz & Strohmer, 2014, S.505).

Des Weiteren wirken sich z. B. Überzeugungen über die eigenen Fähigkeiten, eine Aufgabe zu lösen, auf die Aufgabenauswahl und das Durchhaltevermögen und damit wiederum auf die Leistung aus (Buehl & Alexander, 2005, S.698). An dieser Stelle überschneiden sich die epistemologischen Überzeugungen wieder mit dem Motivationskonstrukt der *mastery-orientation*. Nach Hofer und Pintrich können epistemologische Überzeugungen möglicherweise, neben persönlicher Ziele, dazu dienen, den eigenen Fortschritt oder Lernprozess zu bewerten, um Selbstregulierungsprozesse zu beginnen oder zu beenden (Hofer & Pintrich, 1997, S.128).

Buehl und Alexander berichten von Studien, die einen Zusammenhang von epistemologischen Überzeugungen mit dem Gebrauch kognitiver sowie metakognitiver Strategien und einen Zusammenhang mit dem Notenpunktedurchschnitt und der Leistung nachweisen konnten. Dabei neigten Individuen mit der Überzeugung, dass Wissen einfach ist, zum Gebrauch weniger umfangreicher Strategien (Buehl & Alexander, 2005, S.700).

Ryan und Schommer führten ebenfalls einige Studien zum Zusammenhang epistemologischer Überzeugungen mit Lernergebnissen durch. Ryan nahm an, dass sich die Überzeugungen auf das Verständnis und die akademische Leistung von College-Studenten auswirken. Dabei könne der Übergang von Dualismus zu Relativismus mit Veränderungen in den Informationsverarbeitungsstrategien assoziiert werden. In seiner Studie teilte er Studenten danach ein, ob sie eher eine dualistische oder eine relativistische Perspektive einnahmen und bewertete ihr Verständnis mit Hilfe von Blooms Taxonomiestufen (Bloom et al., 1973). Studenten mit dualistischen Überzeugungen zeigten hauptsächlich deklaratives Wissen, während Studenten mit relativistischen Überzeugungen tieferes Verständnis zeigten und das Wissen anwenden konnten.

Schommer untersuchte den Zusammenhang epistemologischer Überzeugungen mit dem Strategiegebrauch und der akademischen Leistung. Hierfür teilte sie die Studenten bezüglich der von ihr vorgeschlagenen Dimensionen ein und prüfte ihr Text- oder Statistikverständnis. Hinsichtlich des Textverständnisses konnte sie eine statistische Korrelation zwischen bestimmten Dimensionen und der Leistung der Studenten feststellen. Die Überzeugung, dass der Wissenserwerb schnell erfolge, sagte stark vereinfachte Folgerungen, niedrigere Testergebnisse und Selbstüberschätzung voraus. Die Überzeugung, Wissen sei sicher (Dimension Stabilität von Wissen), führte zu unangemessenen und absoluten Folgerungen.

In den Studien zum Statistikverständnis korrelierten das Selbstvertrauen und gute Leistungen der Studenten negativ mit der Überzeugung, dass Wissen einfach sei. Schommer weist auf einen möglichen indirekten Effekt epistemologischer Überzeugungen auf akademische Leistung durch ihren Einfluss auf Lernstrategien hin. Eine Person, die davon überzeugt ist, dass Wissen einfach und isoliert ist, sehe keinen Grund, vertiefte Verarbeitungsstrategien zu verwenden (Hofer & Pintrich, 1997, S.107f, S.127f).

Auch besteht möglicherweise ein Einfluss epistemologischer Überzeugungen auf die Motivation, Wissen zu erwerben oder zu erweitern bzw. auf die Motivation allgemein (Buehl & Alexander, 2005, S.701), was sich, wie wir in Kapitel 4 gesehen haben, auf Lernprozesse und Leistung auswirken kann. Hofer und Pintrich gehen davon aus, dass epistemologische Überzeugungen bei verschiedenen Aufgaben aktiviert werden und dies beeinflusst, wie ein Individuum eine Aufgabe, im Hinblick auf Motivation und Kognition, angeht (Hofer & Pintrich, 1997, S.128f). Auch fächerspezifische Überzeugungen können sich auf das Verhalten und die Motivation auswirken. So können sich z. B. naive Überzeugungen über den Wissenserwerb in der Mathematik negativ auf die Motivation auswirken. Die Überzeugung, dass „those who really understand math should be able to work any assigned problem quickly may impede motivation to persist with difficult problems, although continued effort may have led to success“ (Hofer & Pintrich, 1997, S.128).

Hofer und Pintrich berichten über zwei Studien, die den Zusammenhang epistemologischer Überzeugungen mit Motivation und Kognition untersuchten. Diese konnten nachweisen, dass Studenten mit einer komplexeren Perspektive auf Wissen eher Lernziele verfolgten und sich tiefergehend mit dem Material beschäftigten als Studenten mit einer naiveren Perspektive. Ebenso maßen sie eine positive Korrelation zwischen der Komplexität bzw. Differenziertheit epistemologischer Überzeugungen und intrinsischer Motivation, Selbstwirksamkeit, Selbstregulation sowie akademischer Leistung (Hofer & Pintrich, 1997, S.128).

Paulsen und Feldmann (1999) untersuchten empirische Zusammenhänge zwischen mehrdimensionalen Messungen motivationaler und epistemologischer Überzeugungen anhand von 246 Studenten. Die Dimensionen epistemologischer Überzeugungen, die sie wählten („Simple Knowledge“, „Certain Knowledge“, „Quick Learning“, „Fixed Ability“), orientieren sich an Schommers Modell. Sie betrachteten die motivationalen Konstrukte der intrinsischen und extrinsischen Zielorientierung, des Aufgabenwerts, der Selbstwirksamkeit und der Prüfungsangst. In der Studie konnte ein signifikanter Zusammenhang von drei Dimensionen der Überzeugungen mit vier oder mehr motivationalen Konstrukten nachgewiesen werden. Insgesamt waren 14 der 24 möglichen Korrelationen signifikant. Unterschiede ließen sich anhand des Vergleichs naiver und komplexer epistemologischer Überzeugungen feststellen. Es war unwahrscheinlicher, dass Studenten mit naiveren Überzeugungen, eine intrinsische Zielorientierung hatten, den Wert von Lernaufgaben schätzten, eine interne Lernkontrolle wahrnahmen und sich wirksam in Bezug auf ihre Lernfähigkeiten fühlten. Wahrscheinlicher war es dagegen, dass sie eine extrinsische Zielorientierung und größere Prüfungsangst hatten. Bei den Studenten mit komplexeren Überzeugungen war dies umgekehrt (Paulsen & Feldman, 1999).

Buehl und Alexander untersuchten sowohl Unterschiede in der Motivation als auch in der Leistung von Studenten vor dem Hintergrund ihrer fächerspezifischen epistemologischen Überzeugungen. Sie betrachteten die Fächer Geschichte und Mathematik. An der Studie nahmen 483 Studenten mit einem Durchschnittsalter von 21,82 Jahren teil. Zunächst identifizierten Buehl und Alexander die fächerspezifischen epistemologischen Überzeugungen in den Fächern Geschichte und Mathematik und erstellten damit Profile. Danach untersuchten sie Zusammenhänge zwischen den Überzeugungen, der Motivation sowie der Leistung der Studenten, indem sie analysierten, inwiefern sich die Profile hinsichtlich Motivation und Leistung in den Fächern unterschieden. Sie betrachteten Überzeugungen über die Stabilität und Isoliertheit von Wissen sowie der Autorität als Wissensquelle in beiden Fächern und identifizierten so vier verschiedene Cluster, in die sich die Studenten in beiden Fächern einteilen ließen. Diese Cluster testeten sie dann auf einen möglichen Zusammenhang mit Kompetenzüberzeugungen, Erfolgswerten und Leistung der Studenten.

Dabei zeigten Studenten mit komplexeren und differenzierten Überzeugungen im Fach Geschichte mehr Motivation und bessere Leistung: „These findings suggest that individuals who believe less in the isolation and certainty of history knowledge tend to be more motivated, as assessed via competency beliefs and achievement values, than individuals who believe that history knowledge is more isolated and certain. […] Thus, these findings also suggest that more sophisticated beliefs about the isolation and certainty of knowledge may be more adaptive for learning from expository texts. In addition, when these beliefs are accompanied by more sophisticated beliefs about the source of knowledge, individuals apparently experience the greatest knowledge gains.” (Buehl & Alexander, 2005, S.716f). Gleichzeitig konnten sie nachweisen, dass eine starke Überzeugung von der Isolation mathematischen Wissens nachteilig für die Motivation und den Lernprozess ist. Die Studenten neigten dazu, konsistent in der Komplexität ihrer Überzeugungen in beiden

Fächern zu sein, was für den dualen Charakter (naiv vs. komplex) epistemologischer Überzeugungen spricht (Buehl & Alexander, 2005).

5.1.2. Mathematische Epistemologische Überzeugungen

In Anlehnung an allgemeine epistemologische Überzeugungen, definieren Depaepe und De Corte (2016) mathematische epistemologische Überzeugungen als „implicitly or explicitly subjective conceptions teachers and students hold to be true about the nature and the acquisition of mathematical knowledge" (Depaepe, De Corte, & Verschaffel, 2016, S.3).

Am häufigsten wird zwischen einer absolutistischen und einer fallibilistischen Perspektive auf Mathematik unterschieden. Diese Unterscheidung geht auf Paul Ernest zurück. Aus absolutistischer Perspektive ist mathematische Wahrheit absolut sicher und mathematisches Wissen objektiv. Mathematik ist demnach ein unanfechtbarer Bereich, der nicht in Frage gestellt werden kann (Ernest, 2004, S.3). Diese absolute Gewissheit beruht auf mathematischen sowie logischen Annahmen. Mathematische Aussagen beruhen auf zugrundeliegenden Definitionen, einem Axiomensystem, das, gemäß der absolutistischen Sichtweise, aus grundlegenden, wahren Aussagen besteht und Beweisen, die mittels deduktiver Logik, die Wahrheit erhält, geführt werden (Ernest, 2004, S.6ff). Anstatt des Begriffes „mathematikspezifische epistemologische Überzeugungen", wird häufig der Begriff „mathematische Weltbilder" genutzt. Die Begriffe entsprechen einander (Köller, 2001, S.67).

Die absolutistische Perspektive stößt auf einige Probleme, vor allem in Bezug auf das zugrundeliegende Axiomensystem. Axiome sind keine universellen Wahrheiten, sondern Annahmen. Gödel bewies, dass die Vollständigkeit, d.h. Widerspruchsfreiheit, eines Axiomensystems nicht innerhalb des Systems bewiesen werden kann, und dass, selbst wenn ein System widerspruchsfrei ist, es immer nicht entscheidbare, also auch nicht beweisbare, Aussagen geben wird (vgl. Russellsche Antinomie). Somit enthält jedes Axiomensystem potentiell Widersprüche werden (Ernest, 2004, S.10-14). Auch eine abgeschwächte Form des Absolutismus, in der Axiome als vorläufige Hypothesen betrachtet werden und die Gewissheit mathematischer Aussagen in Bezug auf die Axiome durch Logik gesichert ist, erweist sich als nicht haltbar. Logische Wahrheit ist nicht beweisbar, sondern kann nur angenommen werden und ist somit fehlbar (Ernest, 2004, S.16).

Die fallibilistische Perspektive nimmt an, dass mathematische Wahrheit nicht absolut, sondern fehlbar ist. Sie kann somit zu jedem Zeitpunkt überarbeitet und korrigiert werden. Ernest unterscheidet zwischen einer negativen und einer positiven Form der fallibilistischen

Perspektive. Die negative Form lehnt die absolutistische These ab, bestreitet also die absolute Gültigkeit mathematischen Wissens. Sie ist äquivalent zur positiven Form, die davon überzeugt ist, dass mathematisches Wissen immer korrigierbar sein wird (Ernest, 2004, S.3,18).

Ernest weist darauf hin, dass die Unmöglichkeit mathematischer Gewissheit kein Verlust von Wissen, sondern eine Wissenserweiterung ist. Sie zeigt uns auf, wo die Grenzen dessen, was wir wissen können, liegen (Ernest, 2004, S.20).

Weitere gebräuchliche Konzepte unterscheiden zwischen einer statischen oder realistischen Perspektive, die in etwa der absolutistischen Perspektive entsprechen, in Kontrast zu einer dynamischen oder relativistischen Perspektive, die dementsprechend der fallibilistischen Perspektive gleichkommt (Depaepe et al., 2016, S.1). Muis (2004) unterscheidet in ihrer Review zwischen *availing* und *nonavailing beliefs*, die sie folgendermaßen definiert:

> „Availing beliefs are associated with better learning outcomes, and nonavailing beliefs have no influence on learning outcomes or negatively influence learning outcomes." (Muis, 2004, S.323)

Insgesamt lässt sich in den verschiedenen Konzepten eine Ähnlichkeit zur Unterscheidung zwischen der naiven und der komplexen Perspektive bei epistemologischen Überzeugungen allgemein erkennen.

Mathematische epistemologische Überzeugungen können innerhalb allgemeiner mathematikbezogener Überzeugungen eingeordnet werden. Op 't Eynde et al. (2002) unterscheiden zwischen Überzeugungen über Mathematikbildung, Überzeugungen über das Selbst als Mathematiker und Überzeugungen über den Mathematikunterrichtskontext. Mathematische epistemologische Überzeugungen gehören zur ersten Kategorie, ebenso wie Überzeugungen zum Mathematiklernen und -unterrichten. Die verschieden mathematikbezogenen Überzeugungen sind nicht isoliert, sondern hängen zusammen und beeinflussen sich gegenseitig (Op't Eynde, De Corte, & Verschaffel, 2002). Depaepe, De Corte et al. (2016) verweisen darauf, dass die Überzeugungen kognitive, emotionale sowie motivationale Aspekte beinhalten, sowie darauf, dass mathematische epistemologische Überzeugungen auch mit emotionalen Einstellungen gegenüber Mathematik zusammenhängen (Depaepe et al., 2016, S.17f). Eine Implikation dieser Beobachtung ist, dass es für diese Arbeit sinnvoll ist, Studien zu betrachten, die abgesehen von mathematischen epistemologischen Überzeugungen auch andere mathematikbezogene Überzeugungen untersuchen.

Allgemein weisen Studien darauf hin, dass Schüler und Studenten zu einer absolutistischen Perspektive (bzw. zu einer statischen Perspektive oder zu *nonavailing beliefs*, je nach Termini, die verwendet werden) tendieren. Muis‘ Review umfasst 33 Studien, die die mathematischen epistemologischen Überzeugungen von Schülern oder Studenten untersuchen. Alle Studien untersuchten unterschiedliche Überzeugungen, Muis nahm aber nur Studien auf, in denen mindestens einer der folgenden Dimensionen vorkommt: Natur von mathematischem Wissen, Rechtfertigung von mathematischem Wissen, Wissensquelle oder Mathematiklernen. Muis berichtet, dass Schüler bzw. Studenten über alle Bildungsniveaus hinweg *nonavailing beliefs* haben. Sie betrachten mathematisches Wissen als etwas Unveränderliches, das nicht selbst aktiv konstruiert werden kann, sondern nur passiv von einer Autorität vermittelt wird. Beim Lösen eines Problems muss die eine richtige Antwort gefunden werden. Mathematische Fähigkeiten sind ihrer Meinung nach angeboren und es ist nicht möglich, Mathematik durch logisches Denken und Begründen zu lernen. Diese Überzeugungen erinnern stark an den in Kapitel 4.1 beschrieben Zustand der Hilflosigkeit. Weiterhin sehen die Schüler bzw. Studenten keinen Zusammenhang zwischen verschiedenen Bereichen mathematischen Wissens und mathematischen Konzepten (Muis, 2004, S.330f).

Rolka und Halverscheid (2011) nutzten eine Kombination von Bildern, Texten und Interviews, um die mathematischen Weltbilder von 5.- und 6.-Klässlern zu untersuchen. Die Schüler mussten zuerst zeichnen, was Mathematik für sie bedeutet, und die Zeichnung dann schriftlich anhand einiger Leitfragen erklären. Falls noch Unklarheiten bestanden, wurden Interviews mit ihnen geführt. Die Einteilung der Weltbilder richtete sich nach Ernests Kategorisierung der Überzeugungen in die instrumentalistische – Mathematik als nützliche Sammlung von Fakten, Regeln, Formeln, Fertigkeiten und Verfahren, die alle isoliert voneinander sind –, die platonische – Mathematik als statischer, aber einheitlicher Wissensbestand, der eine zusammenhängende Struktur aufweist – und die problemlösende – Mathematik ist dynamisch, wird kontinuierlich ausgebaut und kreative und konstruktive Prozesse spielen zentrale Rolle – Sichtweise.

In zwei ersten Studien entwickelten Rolka und Halverscheid einen Kriterienkatalog, den sie auf Verlässlichkeit überprüften und der von *Ratern* bewertet und verbessert wurde. An der dritten Studie nahmen mehr als 200 Schüler aus der fünften und sechsten Klasse teil. Dabei zeigten mehr als 80 Prozent eine instrumentalistische Sichtweise. Es gab aber auch Werke, die ein gemischtes Weltbild repräsentierten. Vor allem Bilder, die der instrumentalistischen Sichtweise zugeordnet wurden, zeigten auch Merkmale anderer Sichtweisen. Es gab zudem Bilder, die Merkmale der platonischen und problemlösenden Sichtweise zeigten (Rolka & Halverscheid, 2011).

Die Studie von Grigutsch (1997) weist darauf hin, dass sich die Überzeugungen über Klassenstufen und Alter hinweg verändern. Er erfasste mittels Fragebögen und Interviews die mathematischen Weltbilder von 1650 Schülern aus der 6., 9. und 12. Klasse (Grund- und Leistungskurs Mathematik), und Mathematiklehrern an 20 Gymnasien. Während die Schüler der 6. Klasse Mathematik mehrheitlich als Einheit betrachteten und dasselbe mathematische Weltbild sowie ein überwiegend positives Selbstbild hatten, konnte bei den Schülern in Klasse 9 und 12 zwei Pole beobachtet werden. Entweder neigten die Schüler zu einer statischen Sicht oder einer dynamischen Sicht. Grigutsch schließt, dass es zwischen Klasse 9 und 12 zu einer Polarisierung der Einstellungen kommt. Zudem konnten Unterschiede in Grund- und Leistungskurs ausgemacht werden. Die Teilnehmer des Grundkurses tendierte eher zu einer statischen Sicht und es konnte eine Distanzierung von der Mathematik beobachtet werden, während der Leistungskurs eher eine dynamische Sicht einnahm und ein positives Selbstbild hatte (Grigutsch, 1997).

Zusammenfassend scheint bei Schülern die absolutistische Perspektive auf Mathematik zu dominieren, wobei sich die Perspektive im Verlauf der Schulzeit verändert und sich je nach Interessen der Schüler unterscheidet.

Da in Ganita Mathematiker in Form der Spielfiguren und durch die Biografien im Lexikon eine besondere Rolle spielen, werden im Folgenden noch zwei Studien analysiert, die das Bild untersuchen, das Schüler von Mathematikern und ihrem Beruf haben.

An der Studie von Picker und Berry (2000) nahmen 12- und 13-jährige Schüler aus den USA, Großbritannien, Finnland, Schweden und Rumänien teil. Sie erhielten einen Fragebogen, in dem sie aufgefordert wurden, einen Mathematiker bei der Arbeit zu zeichnen und sollten zusätzlich zwei offene Fragen beantworten, in denen sie nach den Umständen, unter welchen man einen Mathematiker einstellen müsste, und nach einer Erklärung für ihre Zeichnung gefragt wurden. Die Fragen wurden in die Muttersprache der Schüler übersetzt. Picker und Berry gehen nicht darauf ein, ob dabei versucht wurde die genderneutrale Formulierung, wie sie im Englischen möglich ist (a mathematician) zu erhalten. Im Deutschen z. B. könnte es einen Einfluss auf die Ergebnisse haben, ob die Schüler die Aufgabe bekommen, einen Mathematiker zu zeichnen oder einen Mathematiker oder eine Mathematikerin zu zeichnen.

Die Bilder und Antworten gaben Hinweise darauf, dass Schüler nicht verstanden, was ein Mathematiker tatsächlich tut. Sie sahen z. B. oft keinen Grund, warum man einen Mathematiker einstellen sollte oder griffen auf das zurück, was sie aus dem Schulkontext kannten (den Lehrer). Am häufigsten wurden Unterrichten und Buchhaltung genannt. Ebenfalls, aber nicht mehr ganz so häufig, gaben sie Bau- und Bankwesen an und nur selten nannten sie die Bereiche Programmieren und Problemlösen. Es gab, neben kleiner kultureller Unterschiede, Stereotypen, die in allen Ländern vorkamen. Picker und Berry teilten diese in sieben Unterthemen ein: Mathematik als Zwang, der verrückte Mathematiker, der überforderte Mathematiker, der Mathematiker, der nicht unterrichten kann, Verunglimpfung von Mathematikern, der Einsteineffekt und der Mathematiker mit besonderen Kräften. Einsteineffekt meint, dass in den Bildern eine Referenz zu Albert Einstein vorkam. In dem Unterthema „Mathematik als Zwang“ wurden oft Lehrer gezeichnet, die Einschüchterung, Gewalt oder Drohungen nutzen, um die Schüler zum Lernen zu bringen. Die besonderen Kräfte der Mathematiker im letzten Unterthema fanden sich in Form von Superkräften und Zaubertränken auf den Bildern. Dass Mathematik als Hexerei angesehen wird, führen Picker und Berry darauf zurück, dass der oft lange und schwierige mathematische Prozess für die Schüler nicht sichtbar ist. Mathematiker und ihre Arbeit scheinen für die Schüler zum größten Teil unsichtbar zu sein.

Ein weiterer Aspekt betrifft das Geschlecht der gezeichneten Mathematiker. Sowohl von männlichen als auch weiblichen Schülern wurden mehr Männer als Frauen gezeichnet. Eine Ausnahme bildet die Schülergruppe aus Großbritannien. Dort malten doppelt so viele Jungen wie in den USA eine weibliche Person. Sie zeichneten die Hauptperson einer erfolgreichen britischen Fernsehserie. Die Autoren sehen hier die Möglichkeit der Einflussnahme auf die Bilder und Überzeugungen der Schüler und ein mögliches Rollenmodell für Mädchen. Auffällig ist in diesem Zusammenhang auch, dass bei Kindern im Grundschulalter kein Überwiegen der männlichen Figuren festgestellt werden konnten. Picker und Berry verweisen auf eine Studie, in der Kinder der 1. Klasse sogar mehr weibliche als männliche Personen malten und Kinder der 2. bis 4. Klasse in etwa gleiche viele Personen beider Geschlechter malten. Das Bild scheint sich also im Alter zwischen zehn und zwölf Jahren zu wandeln.

Die Ursachen für diese länderübergreifenden Bilder von Mathematikern sehen Picker und Berry in den durch die Kultur vermittelten Stereotypen von Mathematik. Mathematik wird in der Gesellschaft oft als schwierig und langweilig dargestellt und Frauen als nicht mathematisch begabt. Zudem wird es generell akzeptiert, sich verächtlich über Mathematik zu äußern. Sie beschreiben einen Teufelskreis von Stereotypen. Zu Beginn ihrer Schulkarriere wissen Schüler relativ wenig über Mathematik und Mathematiker. Sie werden im Laufe der Schulzeit mit gesellschaftlichen Stereotypen und negativen Haltungen gegenüber Intellektualität und der Mathematikergemeinschaft konfrontiert. Zudem sind sich die Lehrer dieser Stereotypen häufig nicht bewusst und die Unterrichtsmethoden sind mechanisch und wenig abwechslungsreich. Auf Basis dieser Einflüsse bilden die Schüler ihre Einstellungen und Überzeugungen, die sie häufig nicht kritisch überdenken oder zu denen sie keine Alternative angeboten bekommen, wodurch sich gesellschaftlichen Stereotypen erhalten (Picker & Berry, 2000).

In einer weiteren Studie von Aguilar et al. (2016) wurden die Bilder untersucht, die 63 leistungsstarke mexikanische Schüler zwischen 17 und 18 Jahren (54 Jungen und neun Mädchen) von Mathematikern haben, wobei der Fokus auf dem Gender der gezeichneten Mathematiker lag. Als Bild (engl. *image*) definieren sie die Repräsentation, die eine Gruppe von Menschen von etwas hat. Sie verweisen darauf, dass sich der Begriff Gender auf das soziale und nicht das biologische Geschlecht bezieht. Es handelt sich um ein soziales Konstrukt und umfasst z. B. den Aspekt, dass in weiten Teilen der Gesellschaft manche Aktivitäten als männlich und andere als weiblich betrachtet werden. Aguilar et al. interessierten sich dafür, welche Geschlechtsidentität dem Beruf des Mathematikers zugewiesen wird. Die Schüler mussten einen Mathematiker zeichnen und ihre Zeichnung schriftlich beschreiben. Aguilar et al. erwähnen, dass versucht wurde, die Aufgaben geschlechtsneutral zu formulieren. Im Spanischen gibt es, wie im Deutschen, eine männliche und eine weibliche Form. Um einen Einfluss auf die Bilder der Schüler zu vermeiden, verwendeten sie die Formulierung „a person whose profession is mathematics".

Das dominierende Bild war das einer männlichen und intelligenten Person, die lässig oder formell gekleidet war, eine formelle Frisur hatte, manchmal eine Brille trug und Freude an der Arbeit sowie Leidenschaft für die Mathematik hatte. Fast keiner der Schüler zeichnete eine Frau, insbesondere zeichnete keiner der 54 Jungen eine Frau. Eine Schülerin zeichnete eine erfolgreiche Ingenieurin und erklärte, dass sie eine Inspiration für sie sei. Das verdeutlicht die Bedeutung von Vorbildern und des Modelllernens. Meistens wurden Lehrer gezeichnet, was darauf hinweist, dass Mathematiker als Mathematiklehrer gesehen werden, und oft tauchten Elemente aus dem Schulkontext auf. Der Lehrer und das Klassenzimmer scheinen also das Bild, das Schüler von Mathematikern und ihrer Tätigkeit haben, zu beeinflussen und Mathematiker, die nicht Mathematiklehrer sind, sind in der Öffentlichkeit unsichtbar. Trotz des Vorherrschens der Mathematiklehrer kamen auch andere realistische

Bereiche, wie Statistik, Forschen und mathematische Modelle, vor. In einigen Punkten unterschieden sich die Ergebnisse zu anderen Studien. Es gab z. B. keine aggressive Darstellung von Lehrern. Aguilar et al. sehen in diesen zwei Beobachtungen einen Hinweis darauf, dass leistungsstarke Mathematikschüler ein realistischeres Bild von Mathematikern haben (Aguilar, Rosas, Zavaleta, & Romo-Vázquez, 2016).

Sowohl Picker und Berry, als auch Aguilar, Rosas et al. verweisen auf weitere Studien, in denen sich ein sehr negatives Bild abzeichnet, das Schüler und Studenten über verschiedene kulturelle Kontexte hinweg von Mathematikern und Wissenschaftlern haben und sehen darin mögliche Auswirkungen auf das Mathematikverhalten (Aguilar et al., 2016, S.529f; Picker & Berry, 2000, S.65f). Aguilar, Rosas et al. sprechen zusammenfassend von einem Bild „of an elderly or middle-aged white man working in a laboratory, with facial hair and wearing a white coat and eyeglasses" (Aguilar et al., 2016, S.529f). Zudem werden die Mathematiker oft als außergewöhnlich intelligent, besessen von Mathematik und sozial untauglich dargestellt. Als Ursprung der Bilder werden meist soziale Erfahrungen wie der Schulkontext, Eltern, Freunde und Medien gesehen. Mathematik wird dabei meist negativ repräsentiert. Zudem werden Weiblichkeit und Mathematik als unvereinbar dargestellt (Aguilar et al., 2016, S.529ff).

Einen großen Anteil an der Entwicklung mathematischer epistemologischer Überzeugungen hat die Unterrichtsumgebung (Depaepe et al., 2016, S.22; Muis, 2004, S.322). Die Studien, die Muis zusammenfasst, sind sich einig, dass der formale Mathematikunterricht großen Einfluss auf die Entwicklung von mathematischen epistemologischen Überzeugungen hat. Es konnte jedoch keine Ursache-Wirkungs-Beziehung von Unterrichtserfahrungen und Überzeugungen nachgewiesen werden. Des Weiteren spielen auch kulturelle und familiäre Faktoren eine Rolle. Ein paar Studien untersuchten die stufenweise Entwicklung der mathematischen epistemologischen Überzeugungen und konnten feststellen, dass mit Ansteigen der Klassenstufe, auch die *availing beliefs* der Schüler zunahmen (Muis, 2004, S.334-339).

Schon im vorherigen Kapitel wurde der Zusammenhang zwischen epistemologischen Überzeugungen und motivationalen Faktoren sowie akademischer Leistung angesprochen. Studien, die diesen Zusammenhang speziell in Bezug auf mathematikbezogene Überzeugungen untersuchen, bestätigen den Einfluss, den diese Überzeugungen auf mathematisches Verhalten und mathematische Leistung haben können. Generell wird eine dynamische bzw. fallibilistische Sichtweise mit besserer Leistung in Verbindung gebracht. Die Leistung wird dabei indirekt über motivationale Faktoren wie

Selbstwirksamkeitsüberzeugungen, die direkt von den mathematischen epistemologischen Überzeugungen beeinflusst werden, beeinflusst. Nicht in allen Studien konnte nachgewiesen werden, dass komplexe epistemologische Überzeugungen immer zu einer besseren Leistung führen, z. B. im Vergleich zu gemischten Überzeugungen (Depaepe et al., 2016, S.18-21).

Auch in der Review von Muis zeichnet sich ein indirekter Einfluss mathematischer epistemologischer Überzeugungen auf die akademische Leistung über den direkten Einfluss auf das Lernverhalten ab. In qualitativen Studien wurde der Einfluss untersucht, den mathematische epistemologische Überzeugungen darauf haben, wie sehr Schüler und Studenten in den Lernprozess involviert sind, d.h. wie lange sie z. B. an einem Problem arbeiten oder welche Strategien sie nutzen. Quantitative Studien nutzten Selbstberichte und konnten einen signifikanten Zusammenhang zwischen den Überzeugungen und den Verhaltensweisen während des Lernens sowie zwischen den Verhaltensweisen und der späteren Leistung nachweisen. Die Studien konnten keine Ursache-Wirkungs-Beziehung nachweisen, sondern lediglich eine Korrelation zwischen Überzeugungen, Lernen und Leistung (Muis, 2004, S.339-345).

In Bezug auf fächerspezifische und fächerübergreifende Überzeugungen fällt auf, dass die meisten Studien herausfanden, dass Schüler und Studenten im Fach Mathematik im Allgemeinen weniger *availing beliefs* haben als in anderen Fächern. Folgen von *nonavailing beliefs* sind, dass die Schüler und Studenten Mathematik eher meiden als andere Fächer, aufgeben oder scheitern (Muis, 2004, S.346, 352).

Köller (2001) untersuchte anhand der Daten der deutschen Fortsetzung von TIMMS (Third International Mathematics and Science Study), ob mathematische Weltbilder einen Effekt auf Lernstrategien, Lernmotivation und Kurswahl (zwischen Grund- und Leistungskurs) und folglich einen indirekten Effekt auf die Leistung der Schüler haben. Es lagen Daten von 2138 Schülern der Sekundarstufe II am Gymnasium vor. In der Studie wurden vier Dimensionen von mathematischen Weltbildern gemessen: sicheres Wissen, einfaches Wissen, konstruktivistische Konzeption von mathematischem Wissen und Relevanz von Mathematik beim Problemlösen in angewandten Bereichen. Alle vier Dimensionen konnten die Leistung direkt oder indirekt signifikant vorhersagen. Die Überzeugung, dass Wissen sicher und einfach ist, hatte einen negativen Effekt auf die Leistung, während die anderen beiden Dimensionen einen positiven Effekt hatten. Als wichtigste vermittelnde Variable identifizierte Köller die Lernmotivation, insbesondere das Interesse. Es wurde auch ein signifikanter Effekt von Übung auf Leistung gemessen. Interesse führte zudem zur Anwendung vertiefter Lernstrategien. Die bessere Leistung in den Leistungskursen konnte unter anderem auf ein größeres Interesse zurückgeführt werden. Somit führen nicht nur die größere Stundenanzahl oder die schwierigeren Herausforderungen in diesen Kursen zu einer besseren mathematischen Leistung (Köller, 2001).

Komplexe mathematische epistemologische Überzeugungen stehen also im Zusammenhang mit besserer mathematischer Leistung, während naivere Überzeugungen mit schlechterer Leistung im Zusammenhang stehen. Ein möglicher Ansatz, schwächere Schüler mit eher naiven Überzeugungen in Mathematik zu unterstützen, wäre demnach ihre Überzeugungen hin zu komplexeren Überzeugungen zu verändern.

5.2. Veränderung epistemologischer Überzeugungen

Wie wir im vorherigen Kapitel gesehen haben, spielt der Mathematikunterricht, durch die Unterrichtsweise und das Lehrerverhalten, eine wesentliche Rolle für die Entwicklung mathematischer epistemologischer Überzeugungen und bietet somit auch eine Chance für deren Veränderung. Weitere Umweltfaktoren wie das Elternhaus oder die Schule bzw. Universität insgesamt können ebenfalls Einfluss auf die Überzeugungen der Schüler und Studenten nehmen (Hofer and Pintrich 1997, S.123f).

Die von Muis zusammengefassten Studien unterstützen die Hypothese, dass Überzeugungen mittels spezifischer Veränderungen im Unterricht verändert werden können. Muis sieht im Unterricht sogar das Schlüsselprinzip zu Veränderung der Überzeugungen. Verschiedene Unterrichtsarten können mit verschiedenen Überzeugungsdimensionen assoziiert werden. Vereinfachend gesagt kann Frontalunterricht, in dem die Geschwindigkeit sowie das Auswendiglernen von Regeln und Verfahren im Vordergrund stehen, mit Überzeugungen, dass der Lernprozess schnell sein muss, mathematisches Wissen nicht veränderbar und der Lehrer die Quelle für die Rechtfertigung des Wissens ist, d.h. mit *nonavailing beliefs*, assoziiert werden. Ein konstruktivistischer Zugang, der bedeutungsvolle und authentische Kontexte schafft und prozessorientiert ist, kann mit Überzeugungen, dass Wissen aktiv konstruiert werden kann, der Lernprozess lange und anstrengend ist und Mathematik mit anderen Bereichen des Lebens zusammenhängt, d.h. mit *availing beliefs*, assoziiert werden. Es konnten nur Assoziationen, keine Ursache-Wirkungs-Beziehung nachgewiesen werden (Muis, 2004, S.362f).

Manson und Scrivani (2004) untersuchten, welchen Einfluss die Änderung der Lernumgebung auf die Entwicklung mathematischer epistemologischer Überzeugungen hatte und wie sich diese wiederum auf die Leistung im Problemlösen auswirkte. An der

Intervention nahmen 86 Fünftklässler teil, von denen 46 in einer innovativen und 40 in einer traditionellen Lernumgebung unterrichtet wurden.

Die Intervention umfasste zwölf Unterrichtseinheiten. Die innovative Lernumgebung unterschied sich hinsichtlich der Rolle des Schülers und des Lehrers, der behandelten mathematischen Probleme und hinsichtlich dessen, was als gutes mathematisches Problem, als gutes Lösungsverfahren und als gute Antwort gewertet wurde. Die Schüler wurden zu eigenständigem und aktivem Handeln angeregt und sollten Verantwortung für ihr eigenes Verstehen übernehmen. Der Lehrer ermutigte die Schüler und animierte sie dazu, sich aktiv zu beteiligen sowie zu reflektieren. Er passte seine Unterstützung an die Fortschritte der Schüler an. Unterschiedliche Interpretationen und Lösungen von Problemen waren möglich und mechanische Anwendungen von Lösungsverfahren wurden vermieden. Die behandelten Probleme waren nicht typisch für den herkömmlichen Unterricht. Die Schüler wurden sowohl mit realistischen als auch unlösbaren oder nicht eindeutigen Problemen konfrontiert. Zudem wurde die Interaktion zwischen den Schülern durch Gruppenarbeiten und Diskussionen im Plenum gefördert.

Mason und Scrivani identifizierten zwei Überzeugungsdimensionen. Zum einen Überzeugungen der Schüler über sich selbst als Mathematiklerner, d.h. Überzeugungen über die eigenen Fähigkeiten und die eigene Anstrengung, zum anderen Überzeugungen über Mathematik und mathematisches Problemlösen, d.h. Überzeugungen zu mathematischen Verfahren, dem Verstehen und der Nützlichkeit von Mathematik. Zur Überprüfung der Leistung im Problemlösen bearbeiteten die Teilnehmer zwei Arten von Textaufgaben vor und nach der Intervention. Die einen umfassten gewöhnliche Aufgaben, d.h. typische Schulbuchaufgaben, die anderen ungewöhnliche Aufgaben, d.h. Aufgaben, die normalerweise nicht im Unterricht auftauchen. Von letzteren war ein Problem realistisch und das andere unlösbar.

Die anfänglichen Überzeugungen der Schüler korrelierten signifikant positiv mit der Leistung in den gewöhnlichen Textaufgaben, nicht aber mit der in den ungewöhnlichen Textaufgaben. Die Leistung in den gewöhnlichen Textaufgaben korrelierte in Pre- und Posttest. Die innovative Lernumgebung trug mehr zur Entwicklung der mathematischen epistemologischen Überzeugungen bei als die traditionelle Lernumgebung. Schüler, die in der innovativen Umgebung unterrichtet wurden, wiesen in beiden Dimensionen komplexere Überzeugungen als die Schüler der traditionellen Umgebung auf. Weiterhin verbesserte sich die innovative Gruppe beim Lösen gewöhnlicher und ungewöhnlicher Textaufgaben, was auf eine Verbesserung ihrer Problemlösefähigkeiten hinweist. Ihre Leistung im Lösen der ungewöhnlichen Textaufgaben korrelierte im Posttest signifikant positiv mit beiden Überzeugungsdimensionen. Dabei wurden die ungewöhnlichen Probleme umso besser gelöst, je komplexer die Überzeugungen waren. Die innovative Gruppe bewertete ihre Anstrengung höher und ihr Verständnis besser und nahm die Veränderung ihrer Überzeugungen, z. B. hinsichtlich der Natur eines Problems und wie es zu lösen ist oder hinsichtlich des Wertes von harter Arbeit in Mathematik, wahr (Mason & Scrivani, 2004).

Ein weiterer Zugang zur Änderung epistemologischer Überzeugungen besteht darin ein kognitives Ungleichgewicht hinsichtlich bestehender Überzeugungen im Individuum zu erzeugen. Die neuen Erfahrungen werden dann entweder an die bestehenden Vorstellungen assimiliert oder die Vorstellungen und Überzeugungen werden angepasst (Hofer & Pintrich, 1997, S.123f).

Dieser Zugang ähnelt stark der *Conceptual Change* Theorie. Diese geht davon aus, dass Unstimmigkeiten und neue konzeptuelle Vorstellungen zur Unzufriedenheit mit dem aktuellen Konzept führen. Das Individuum versucht diese Diskrepanz zu lösen und ändert hierfür womöglich sein bestehendes Konzept (Kienhues et al., 2008, S.548f; Muis, 2004, S.362). Diese Theorie kann auch für Überzeugungen genutzt werden. Muis betont, dass sich Individuen über ihre eigenen Überzeugungen bewusst sein sollten, um eine nachhaltige Überzeugungsänderung zu sichern (Muis, 2004, S.362).

Bendixen und Rule schlagen ein ähnliches Modell vor, durch das bestehende epistemologische Überzeugen schrittweise geändert werden sollen. Zuerst wird epistemischer Zweifel im Individuum erzeugt. Das bedeutet, dass die bestehenden Überzeugungen in Frage gestellt werden und dadurch ein kognitives Ungleichgewicht erzeugt wird. Im nächsten Schritt, der epistemischen Volition, richtet ein Individuum seine Aufmerksamkeit und Konzentration darauf, das bestehende Ungleichgewicht zu lösen. Der letzte Schritt, Lösungsstrategien, besteht darin, das Ungleichgewicht tatsächlich mittels Reflektion und sozialer Interaktion zu lösen und Zweifel zu beseitigen. Als spezielle Methode zur Erzeugung epistemischer Zweifel wird der *refutational text* genannt, der auch im Rahmen des Mathematikunterrichts verwendet werden kann. Dieser erzeugt durch die Darlegung neuer und plausibler sowie wissenschaftlich abgesicherter Überzeugungen Unstimmigkeiten mit den bestehen Überzeugungen (Depaepe et al., 2016, S.22-25; Kienhues et al., 2008, S.547ff).

Kienhues und Bromme versuchten, die fächerspezifischen epistemologischen Überzeugungen 58 deutscher Studenten durch eine kurze Unterrichtsintervention zu verändern. Die Studenten tendierten vor der Intervention zur Hälfte zu naiveren und zur anderen Hälfte zu komplexeren Überzeugungen. Ziel war es, die naiven Überzeugungen in Richtung komplexerer Überzeugungen zu verändern. Dafür unterteilten sie die Studenten in zwei Gruppen und nutzten das Modell von Bendixen und Rule. In einer Gruppe wurden die Studenten mit widerlegenden epistemologischen Instruktionen konfrontiert, die komplexen Überzeugungen entsprachen, während die andere Gruppe informative Instruktionen, die eher naive Überzeugungen unterstützen, erhielt. Nach der Intervention wurden die Überzeugungen mit zwei unterschiedlichen Fragebögen gemessen.

Die Ergebnisse unterschieden sich je nach Fragebogen. Die Auswertung des ersten Fragebogens ergab, dass alle Gruppen, bis auf die Gruppe mit naiven Überzeugungen, die konfrontierende Instruktionen erhielt, nach der Intervention einen naiveren Standpunkt hatten. Die Gruppe mit naiven Überzeugungen, die konfrontierende Instruktionen erhielt, zeigte bei diesem Fragebogen keine signifikanten Unterschiede in ihren Überzeugungen. Der zweite Fragebogen hingegen maß bei dieser Gruppe komplexere Überzeugungen. Bei der Gruppe mit komplexen Überzeugungen, die informative Instruktionen erhielten, maß naivere Überzeugungen und bei allen anderen Gruppen zeigten sich keine signifikanten Veränderungen. Nur der zweite Fragebogen zeigte also die erwarteten Ergebnisse für die naive Gruppe, die konfrontierende Instruktionen erhielt. Dass in einem Fall auch die Gruppe mit komplexen Überzeugungen, die konfrontierende Instruktionen erhielt, eine signifikante Veränderung hin zu naiveren Überzeugungen zeigte, entsprach nicht den Erwartungen (Kienhues et al., 2008).

Es besteht aber auch kein Grund, die komplexen Überzeugungen zu verändern. Die Methode des *refutational text* sollte sich vielmehr an Schüler und Studenten mit naiven Überzeugungen richten, da diese mit schlechteren Leistungen zusammenhängen. Für diese Gruppe lässt sich das Potential der Methode erkennen, die Ergebnisse sind jedoch nicht klar und eindeutig.

Häufig wird argumentiert, dass es sinnvoll ist, die Geschichte der Mathematik in den Unterricht einzubinden, da so die Dynamik, Fehlbarkeit und soziokulturelle Natur der Mathematik aufgezeigt werden kann und dadurch die mathematischen epistemologischen Überzeugungen von Schülern und Studenten verändert werden können (Depaepe et al., 2016, S.22-25). Dieser Ansatz ist für diese Arbeit von besonderem Interesse, da Ganita eine Kategorie („Wie war es wirklich“) enthält, die sich ausschließlich mit geschichtlichen Themen und wichtigen historischen Figuren beschäftigt.

Um die Auswirkungen dieses historischen Zugangs zur Veränderung epistemologischer Überzeugungen zu untersuchen, führte Liu (2009) eine qualitative Studie mit sieben taiwanesischen Ingenieursstudenten durch. Er fokussierte sich auf die Überzeugungen über Mathematik als Prozess und über Mathematik als Produkt. Die Teilnehmer wurden vorab je nachdem, ob sie eine eher statische oder eine eher dynamische Auffassung von Mathematik hatten, in zwei Gruppen eingeteilt. Ihre Überzeugungen wurden mittels offener Fragebögen, den mathematischen Biografien der Schüler, Berichten innerhalb der Klasse und nachbereitenden Interviews ermittelt.

Beide Gruppen nahmen an einem einjährigen Kurs zur Infinitesimalrechnung mit geschichtlichem Zugang Teil. Das Einbinden der Geschichte sollte dazu dienen, ein besseres Verständnis des Wesens der Mathematik zu bekommen und den Studenten z. B. die Dynamik oder das mögliche Scheitern in mathematischen Prozessen oder die soziokulturelle Natur der Mathematik aufzeigen. Als Kontrollgruppe dienten vier zufällig ausgesuchte Studenten einer anderen Klasse, die ebenfalls einen Kurs zur Infinitesimalrechnung, aber ohne geschichtlichen Zugang, besuchten. Im Kurs der Experimentalgruppe wurde vor allem die mathematische Entwicklung im 17. Jahrhundert behandelt. Diese Entwicklung war kein geradliniger Prozess und reflektiert den quasi-empirischen Charakter und die menschlichen Komponenten der Mathematik als gesellschaftliches Konstrukt. Zudem spielte in dieser Zeit die Anwendbarkeit der Infinitesimalrechnung eine wichtige Rolle.

Die Unterrichtsweise war induktiv orientiert, die Anordnung der Themen richtete sich nach der geschichtlichen Reihenfolge. Es wurde versucht eine dynamische und problemlösende Umgebung zu schaffen. Die geschichtlichen Probleme wurden genutzt, um die Neugier zu wecken und als Anreiz für Denk- und Lernprozesse. Weiterhin wurde die Kooperation zwischen den Studenten gefördert.

Die meisten Studenten zeigten signifikante Veränderungen in den Überzeugungen über die Instrumentalität und Gewissheit mathematischen Wissens sowie der Dynamik und Kreativität mathematischen Denkens. Die Tendenzen und das Ausmaß variierten über die Gruppen und Individuen hinweg. Oft nahmen die Studenten nach der Intervention gemischte Positionen ein. Z. B. gaben einige an, dass mathematisches Wissen sowohl erfunden, als auch entdeckt werde. Um ihre Überzeugungen zu untermauern und Beispiele zu geben, griffen sie häufig auf geschichtliche Ereignisse und Personen zurück. Die Gruppe, die zu Beginn zu einer statischen Sicht tendierte, wechselte von einer konservativeren Sichtweise auf Kreativität zu einer positiveren Auffassung. Sie sahen zu Beginn mathematische Kreativität nur bestimmten Menschen vorbehalten oder durch die Schwere des Problems bedingt. Am Ende der Intervention berichteten sie, dass ihnen das Verwenden von Kreativität in den Hausaufgaben gefiel. Sie konnten keine konkreten Beispiele geben und sahen sich zum Teil selbst nicht fähig, mathematische Kreativität zu nutzen. Dies spricht für eine eher oberflächliche Auffassung von Kreativität. Die Kontrollgruppe zeigte sich konsistent in ihren Überzeugungen. Liu folgert, dass insgesamt keine beständige Entwicklung nachgewiesen werden konnte und die Studenten nach dem Kurs meist eine neutrale Position einnahmen.

Von Interesse sind die Kurskomponenten, die mit der Entwicklung der Überzeugungen in Zusammenhang standen. Diese wurden anhand von Interviews mit den Studenten identifiziert. Die geschichtlichen Aufgaben umfassten oft halboffene Problem. Dadurch wurden die Problemlösestrategien der Studenten weiterentwickelt und sie bekamen ein komplexeres Verständnis von mathematischem Denken. Durch die Zugänge der Mathematiker zu verschiedenen mathematischen Problemen, die im Kurs behandelt wurden, fassten die Studenten das Problem als antreibende Kraft in der Mathematik auf. Das Verständnis, der Vergleich und die Bewertung verschiedener Zugänge förderte das Verständnis von mathematischem Denken und übermittelte mathematisches Wissen. Durch die Darstellung der unbeständigen Entwicklung der Infinitesimalrechnung erkannten die Studenten Fehler in verschiedenen Zugängen und damit die Fehlbarkeit mathematischen Denkens. Keiner der Studenten ging mehr in den späteren Interviews davon aus, dass mathematischen Wissens während seiner Entwicklung stabil ist. Ebenfalls zeigten sich die Studenten von der langfristigen Entwicklung mathematischer Aussagen und von den Strategien der Mathematiker beeindruckt und nahmen somit Mathematik als kontinuierliches menschliches Bemühen war.

Liu schließt, dass durch die Intervention ein kognitives Ungleichgewicht durch das Anfechten der bestehenden Überzeugungen erzeugt wurde, aber keine epistemische Volition, die es zur Änderung der Überzeugungen braucht, hervorgerufen wurde. Dies führt er auf ein zu geringes individuelles Reflexionsvermögen und metakognitives Bewusstsein sowie auf eine zu geringen Integrationsfähigkeit zurück (Liu, 2009).

5.3. Mathematikbezogene Überzeugungen im Lernspiel Ganita

Im Folgenden werden aufgrund der großen Ähnlichkeit der Konzepte nur noch die Begriffe ‚komplex' und ‚naiv' in Bezug auf Überzeugungen verwendet. Mit ‚komplex' wird also auch fallibilistisch, dynamisch, availing etc. und mit ‚naiv' auch absolutistisch, statisch, nonavailing etc. gemeint.

Wie wir in Kapitel 5.1. gesehen haben, sind komplexere epistemologische Überzeugungen mit höherer Motivation, dem Verwenden adäquaterer Lernstrategien, einem anderen

Selbstverständnis sowie besserer Leistung assoziiert. Ganita regt die Spieler an, mögliche bestehende naive Überzeugungen zu überdenken und konfrontiert sie auf verschiedenen Wegen mit anderen komplexeren Überzeugungen.

Hofer und Pintrich sowie Muis nannten die Unterrichtsumgebung als wichtigen Faktor, der Einfluss auf die Überzeugungen von Schülern und Studenten hat (vgl. Kapitel 5.2). Muis nannte einige Unterrichtsmerkmale, die mit komplexen Überzeugungen im Zusammenhang stehen (vgl. Kapitel 5.2) und die auch durch Ganita erfüllt werden. Durch den Spielkontext wird ein Frontalunterricht vermieden sowie ein bedeutungsvoller und authentischer Kontext für die Schüler geschaffen. Zu letzterem trägt besonders die Kategorie „Begreife die Welt“ bei. Durch verschiedene Aufgaben wird der Fokus auf den mathematischen Prozess gelegt. Dazu zählen insbesondere Aufgaben, die den Schülern noch unbekannt sind und für die sie kein Verfahren oder keine auswendig gelernten Regeln parat haben. So z. B. folgende Aufgaben:

> „Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:
> Wie viele 2-stellige Zahlen gibt es, bei denen die Zehnerziffer echt größer ist als die Einerziffer?“

> „Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:
> Wie sieht die nächste Zeile in folgendem Zahlendreieck aus?“ [auf dieser Karte sind die ersten fünf Zeilen des Pascalschen Dreiecks abgebildet]

Die innovative Lernumgebung in der Studie von Mason und Scrivani zeichnete sich durch die eigenständige und aktive Rolle der Schüler aus, während der Lehrer unterstützend und animierend agierte. Im Kontext eines Spiels nehmen die Schüler ebenfalls eine aktive Rolle ein. Zudem müssen die Spieler in Ganita Aufgaben eigenständig lösen und kontrollieren. Der Lehrer nimmt im optimalen Fall eine begleitende und unterstützende Rolle ein. Die Aufgaben in Ganita beinhalten zum Teil für die Schule untypische und nicht eindeutige Probleme, die unterschiedliche Interpretationen und Lösungen zulassen. Beispiele hierfür sind folgende Aufgaben:

> „Um diese Karte zu gewinnen, löst diese Aufgabe:
> Ein Schäfer hat 34 Schafe und 16 Ziegen. Wie alt ist er?“

> „Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:
> Gibt es eine Zahl, die nichts verändert, wenn ich sie addiere?“

> „Um diese Karte zu gewinnen, löst folgende Aufgabe:
> Findet 3 natürliche Zahlen für x, y und z, die folgende Gleichung erfüllen:
> $x^2 + y^2 = z^2$“

Des Weiteren fördert die kooperative Spielstruktur die Interaktion der Spieler.

Mehrere Faktoren im Spiel stellen naivere Überzeugungen in Frage und können so epistemischen Zweifel in den Spielern erzeugen. Die Beschreibung der Überzeugungen orientiert sich an den verschiedenen Dimensionen in Schommers Modell (vgl. Kapitel 5.1.1).

Bezüglich der Überzeugungen zur Stabilität von Wissen, zeigt Ganita, dass die Entwicklung mathematischen Wissens ein fehlbarer Prozess ist und auch große Persönlichkeiten Irrtümer begehen. Auf einer Aufgabenkarte wird z. B. erwähnt, dass Pythagoras davon überzeugt war, dass es keine irrationalen Zahlen gibt, womit er sich offensichtlich geirrt hatte. Es gibt viele Aufgaben, die die Überzeugung anfechten, dass es nur die eine richtige Antwort auf ein mathematisches Problem gibt, indem sie viele, manchmal sogar unendlich viele Antwortmöglichkeiten zulassen. Beispiele hierfür sind die obige Aufgabe, in der ein pythagoreisches Zahlentripel gefunden werden muss, und Aufgaben, in denen eine andere Darstellung für eine Zahl gefunden werden muss, die in einer bestimmten Darstellung vorgegeben ist. Folgende Aufgabe zeigt, dass es viele verschiedene Wege gibt, eine Aussage zu beweisen:

> „Um diese Karte zu gewinnen, schätzt die Antwort auf diese Frage:
> Wie viele Beweise des „Satz des Pythagoras“ sind bis heute bekannt?
> Lösung: Über 400. Alle Antworten zwischen 300 und 500 sind eine gute Schätzung.“

Im Lexikoneintrag zu David Hilbert wird das Scheitern seines Hilbertprogramms und die Unmöglichkeit eines vollständigen Axiomensystems erwähnt, was die Stabilität mathematischen Wissens in Frage stellt. Die oben erwähnten Aufgaben, bei denen Schüler keine auswendig gelernten Formeln oder Regeln anwenden können, tragen auch zum Verständnis der Komplexität und Dynamik mathematischen Wissens bei.

Die Überzeugung der Autorität als einzige Wissensquelle wird durch Aufgaben, in denen keine Lösung oder nur ein Beispiel angegeben ist, in Frage gestellt. Die Spieler müssen bei diesen Aufgaben ihre eigene Lösung rechtfertigen. Dabei lernen sie, dass logisches Begründen und Argumentieren als Rechtfertigung dient und somit eine Wissensquelle darstellt. Dazu tragen auch die Pantomime-, Erklär- und Zeichenaufgaben bei. Die Sichtweisen und Erklärungen der Mitspieler werden eher akzeptiert, wenn sie gut begründet ist.

Komplexe Überzeugungen über die Kontrolle und Geschwindigkeit des Wissenserwerbs werden durch Aufgaben aktiviert, die aufzeigen, wie zäh und lange der Wissenserwerb sein kann. Ein sehr passendes Beispiel hierfür ist der große Fermatsche Satz, der in folgender Aufgabe vorkommt:

> „Um diese Karte zu gewinnen, schätzt die Antwort auf diese Frage:
> Wie lange hat es gebraucht, um den großen Fermatschen Satz zu beweisen?“

Die Kategorie „Sei Kreativ“ beinhaltet Aufgaben, die den Wissenserwerb als kreativen Prozess gestalten. Ein Beispiel hierfür ist folgende Aufgabe:

> „Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:
> Von welchen Ecken aus kann man das Haus vom Nikolaus zeichnen, ohne den Stift abzusetzen?“

Die Schüler kennen das Konzept eines Eulerwegs (im Normalfall) nicht, können sich die Antwort auf die Frage aber durch Ausprobieren und induktives Vorgehen herleiten.

Ganita bietet also viele Möglichkeiten, um die Spieler an ihren bestehenden Überzeugungen zweifeln zu lassen. Ob auch epistemische Volition erzeugt wird und sie Lösungsstrategien erarbeiten, wie im Modell von Bendixen und Rule gefordert (vgl. Kapitel 5.2), hängt vermutlich von weiteren Faktoren wie z. B. dem Lehrer ab.

Ganita bietet eine Alternative zum vorherrschenden Bild von Mathematikern. Sowohl Picker und Berry als auch Aguilas et al. folgerten aus ihren Studien, dass Mathematiker und ihre Arbeit in der breiten Öffentlichkeit unsichtbar sind (vgl. Kapitel 5.1.2). Ganita macht verschiedene Mathematiker außerhalb des Schulkontextes und ihre Arbeit durch die Spielfiguren, Biographien im Lexikon und Aufgaben zu den Mathematikern sichtbar.

Insbesondere werden Stereotype durch die Mathematiker, die im Spiel auftauchen, infrage gestellt. Die Hälfte der Spielfiguren ist weiblich und es gibt Biografien von Mathematikerinnen. So treten Frauen in die Vorstellung der Spieler eines typischen Mathematikers, die insbesondere für Mädchen durch starke Identifikation als Vorbild dienen können. Es tauchen eine Mathematikerin auf, die nicht weiß ist (Katherine G. Johnson) und aus verschiedenen Ländern, Epochen und kulturellen Kontexten stammen. In den Biographien und Aufgaben werden sie nicht als aggressiv oder verrückte Genies dargestellt. In der Biographie zu Paul Erdös wird die Erdös-Zahl beschrieben, die verdeutlicht, dass Mathematiker keine isolierten Einzelgänger sind, sondern miteinander kommunizieren und zusammenarbeiten.

Der Lexikonartikel zum Großen Fermatschen Satz verdeutlicht, dass es mathematische Prozesse gibt, die anstrengend sein, lange dauern können und an denen viele Mathematiker scheitern. Die oben erwähnte Aufgabe, die beschreibt, dass Pythagoras der Überzeugung war, dass es keine irrationalen Zahlen gibt, zeigt, dass auch Mathematiker sich irren. Sie erscheinen somit nicht als Genies mit übermenschlichen oder magischen Kräften, sondern als Menschen, die scheitern oder sich irren können und sich für ihren Erfolg anstrengen müssen.

Picker und Berry fordern Themen, die den Schülern zugänglich sind und ihnen die Welt und Arbeit eines Mathematikers näherbringen. Ganita enthält viele Fragestellungen, mit denen sich Mathematiker in ihrer Arbeit beschäftigt haben oder beschäftigen und die auch für Schüler verständlich sind. So z. B. Aufgaben aus der Graphentheorie:

> „Um diese Karte zu gewinnen, schätzt die Antwort auf folgende Frage:
> Wie viele Farben werden benötigt, um eine Landkarte so einzufärben, dass keine benachbarten Felder dieselbe Farbe haben?“

> „Um diese Karte zu gewinnen, schätzt die Antwort auf folgende Frage:
> Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es das Haus vom Nikolaus zu zeichnen?“

In der Biographie zu Leonhard Euler wird außerdem auf das Königsberger Brückenproblem verwiesen. Außerdem gibt es Fragen zu den Grundlagen der Algebra:

> „Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:
> Gibt es eine Zahl, die nichts verändert, wenn ich sie multipliziere?“

Zusätzlich tragen die Biografien dazu bei, den Schülern einen Einblick in das Leben und die Arbeit eines Mathematikers zu verschaffen.

Durch die Kategorie „Wie war es wirklich“ und die Biographien wird ein geschichtlicher Zugang im Spiel geschaffen, der die zum Teil unbeständige und dynamische Entwicklung der Mathematik aufzeigt. Weiter oben wurden schon verschiedene Beispiele für das Scheitern und Irren von Mathematikern genannt. Die Kontroverse über die Frage, ob mathematisches Wissen entdeckt und erfunden wird (absolutistische vs. falliblistische Perspektive), wird erwähnt:

> „Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:
> Wer erfand/entdeckte die Null?
> a) Fibonacci im Jahr 1202
> b) Euklid um 300 v. Chr.
> c) Die Babylonier im 5. Jahrhundert v. Chr.
> d) Die Mayas im Jahr 36. v. Chr.“

Verschiedene Zugänge und Strategien von Mathematikern werden im Lexikon beschrieben oder tauchen auf den Aufgabenkarten auf:

> „Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:
> Was ist das „Sieb Eratosthenes“?
> a) Ein besonders feines Sieb
> b) Ein Verfahren zur Bestimmung von Primzahlen

c) Ein Verfahren zur Lösung von Gleichungen
d) Einer der ersten Rechenschieber“

Zum Sieb Eratosthenes ebenso wie zur Quadratur der Parabel von Archimedes gibt es einen Lexikoneintrag.

Die in diesem Kapitel beschriebenen Beispiele zeigen, dass Ganita viele Gelegenheiten bietet, die naiven mathematikbezogenen Überzeugungen der Spieler anzufechten und ihnen komplexere Überzeugungen näherzubringen. Dadurch ändern sich womöglich die naiven Überzeugungen der Spieler hin zu komplexeren Überzeugungen.

6. Fazit und Ausblick

Kommen wir auf das Zitat in der Einleitung zurück –„Guter Mathematikunterricht bedarf kognitiv aktivierender, reichhaltiger, möglichst authentischer und motivierender inner- und außermathematischer Problemsituationen, die das Potenzial beinhalten, Begriffe, Regeln, Lösungsverfahren oder Modellierungen entweder selbstständig zu entdecken oder begründet zu konstruieren. Dabei spielen die eigenständige Bearbeitung von Frage- und Problemstellungen, die Reaktivierung des Vorwissens, die Auseinandersetzung mit unterschiedlichen Zugangs- und Lösungsmöglichkeiten, ein konstruktiver Umgang mit Fehlern und die Möglichkeit zur Kooperation zwischen den Lernenden eine wichtige Rolle.“ (Ministeriums für Kultus, 2016, S.9) –, so können wir zusammenfassend feststellen, dass das Spiel Ganita eine vielversprechende und abwechslungsreiche Methode ist, um den Forderungen des Bildungsplans zu begegnen.

Das Spiel aktiviert die Schüler durch die Motivation, die es in ihnen hervorruft. Zusätzlich tragen das Embodiment und der kooperative Charakter zu einer Aktivierung bei. In den verschiedenen Kategorien und insbesondere in der Kategorie „Begreife die Welt“ stellen die Aufgaben authentische inner- und außermathematische Problemsituationen dar. Ebenso haben wir gesehen, dass mehrere Aufgaben zur Begriffsbildung beitragen und es einige Aufgaben gibt, in denen die Spieler eine Struktur entdecken und sich Regeln selbst herleiten müssen (vgl. Kapitel 3.4).

Das Entdecken von Lösungsverfahren kommt durch die Kategorie „Sei kreativ“ und durch die unbekannten Aufgabentypen, für die die Schüler keine Lösungsalgorithmen parat haben, ebenfalls nicht zu kurz. Das selbstständige Entdecken wird also durch die Aufgabenkarten, aber auch durch das Lexikon, in dem die Schüler viele verschiedene mathematische Konzepte entdecken können, gefördert. Das eigenständige Bearbeiten von Frage- und Problemstellungen findet einerseits durch die Spielmechanismen statt, da der Lehrer nur eine begleitende Rolle spielt. Andererseits tragen die Aufgaben mit mehreren Lösungsmöglichkeiten zur Eigenständigkeit der Spieler bei. Die Teams müssen sich gegenseitig kontrollieren und selbst entscheiden, ob eine Antwort richtig ist.

Durch die Kooperation der Spieler und durch die Kategorie „Mach dich verständlich“ setzen sich die Spieler mit unterschiedlichen Zugangs- und Lösungsmöglichkeiten auseinander, da jeder Spieler seine eigenen Ideen und Vorschläge miteinbringt.

Ein konstruktiver Umgang mit Fehlern in Form von informativem Feedback (vgl. Kapitel 4.3) ist ebenfalls gegeben, ebenso wie die Möglichkeit zur Kooperation. Letztere wird durch die Spielmechanismen sogar explizit gefordert.

Ganita erfüllt nicht nur die Anforderungen des Bildungsplans, sondern beinhaltet darüber hinaus weitere Möglichkeiten, um Schüler im Mathematikunterricht zu fördern. Wie in Kapitel 3. dargelegt, erfüllt Ganita die meisten Kriterien für die Effektivität von Lernspielen, vor allem hinsichtlich des Wissenserwerbs. Grob gesagt erfüllt Ganita genau das, was ein Lernspiel erfüllen sollte – die Spieler haben Spaß am Spiel und lernen etwas dabei.

Weiterhin haben wir gesehen, dass Ganita die Motivation der Spieler und im Speziellen die intrinsische Motivation für mathematische Inhalte besonders fördert. Dies dient auch einem positiven Lerneffekt, da intrinsische Motivation mit besseren Lernergebnissen im Zusammenhang steht. Dass Spiele motivieren, ist eine grundlegende und offensichtliche Eigenschaft des Spiels, die in Ganita dafür genutzt wird, die Spieler für das Fach Mathematik und für das Lernen zu motivieren.

In Kapitel 5 wurde erläutert, dass Ganita Schülern ermöglicht, neue mathematikbezogene Überzeugungen kennenzulernen, und das Spiel somit zur Veränderung bestehender, nachteiliger Überzeugungen beitragen kann. An dieser Stelle leistet Ganita einen neuen Beitrag zur Kategorie der Lernspiele, da bisher noch keine Lernspiele in diesem Zusammenhang betrachtet wurden. Es wurde lediglich der Einfluss von Lernspielen oder Serious Games auf die Einstellungen und Emotionen der Spieler hinsichtlich der Mathematik genannt oder untersucht. Einstellungen bezogen sich dabei nicht, wie epistemologische Überzeugungen, auf das Mathematikwissen und seinen Erwerb, sondern vielmehr auf positive oder negative Einstellungen zum Mathematikunterricht oder etwa darauf, ob Schüler das Fach wichtig und relevant finden (Boyle et al., 2016; Randel et al., 1992; Tehrani, 2009, S.35).

In dieser Arbeit liegt der Fokus auf der Motivation und den epistemologischen Überzeugungen. Im Folgenden soll ein kleiner Ausblick weiterer Potentiale des Spiels gegeben werden, die noch genauer untersucht werden könnten.

Einige Autoren sehen die Methode des kooperativen Lernens als effektiven Weg, um mathematische Fähigkeiten zu fördern (Boyle et al., 2016; Echeverría et al., 2011; Ke & Grabowski, 2007; Ramani, Siegler, & Hitti, 2012). Ein Zusammenhang zwischen kooperativen Lernmethoden und guter Leistung konnte in einigen Studien nachgewiesen werden (Johnson, Johnson, & Stanne, 2000; Slavin, 1980). In einer weiteren Review (1983) trug Slavin einige Kriterien dafür zusammen, wann kooperatives Lernen die Leistung steigert. Zu diesen Kriterien zählen die Belohnung für die Gruppe sowie die individuelle Verantwortung der Schüler in der Gruppe (Slavin, 1983). Plass, O'Keefe et al. (2013) verglichen in einer Studie eine individuelle, eine kompetitive und eine kooperative Variante desselben Spiels. Zwar steigerte die kompetitive Variante den Lernerfolg im Spiel, während die kooperative Variante die Leistung während der Spielsitzungen verringerte, außerhalb des Spiels jedoch verbesserten sich die mathematischen Fähigkeiten unabhängig von den Bedingungen. Wettbewerb und Kooperation gingen mit einem größeren situativen Interesse und Freude einher und riefen eine größere Lernzielorientierung hervor. Schüler, die die kooperative Variante spielten, neigten im Vergleich zu den beiden anderen Varianten eher dazu, das Spiel noch einmal zu spielen und es anderen zu empfehlen (Jan L Plass et al., 2013).

Über die Verbesserung der Leistung hinaus werden noch weitere Vorteile von kooperativen Methoden genannt. Slavin fasst in seiner Review zusammen, dass kooperative Lernmethoden für die Verbesserung des Selbstbewusstseins, für das Interesse der Schüler füreinander und für ein besseres Verhältnis zwischen Schülern unterschiedlicher Herkunft nützlich sein können (Slavin, 1980). Weiterhin stellen kooperative Umgebungen die aktive Teilnahme aller sicher (Echeverría et al., 2011, S.1129) und führen zu einer höheren Motivation der Schüler als etwa eine kompetitive Umgebung (Boyle et al., 2016, S.21). Die Kommunikation zwischen den Schülern wird gefördert, wodurch diese voneinander lernen können (Ramani et al., 2012, S.669f). Dadurch wird den Schülern ermöglicht, Aufgaben zu meistern, die womöglich etwas über ihren Fähigkeiten liegen (Jan L. Plass et al., 2015, S.260). Ke und Grabowski (2007) fanden heraus, dass sich kooperative Spiele als effektiver herausstellten, um positive Einstellungen von Schülern auf das Fach Mathematik zu fördern (Ke & Grabowski, 2007). Auch für den Lehrer haben kooperative Strukturen Vorteile. Die Denkprozesse und Begründungen werden durch die Kooperation für den Lehrer sichtbar. Ramani und Siegler weisen darauf hin, dass die Schüler über gewisse soziale und emotionale Fähigkeiten verfügen müssen, um eine erfolgreiche Kooperation zu sichern. Andernfalls können kooperative Lernmethoden den Lernprozess behindern (Ramani et al., 2012, S.669f).

Echeverría, García-Campo et al. nennen einige Kriterien, die ein kooperatives Spiel erfüllen muss: „A collaborative learning activity must implement collaborative mechanics that force the group to work together to solve a task. Some of the game mechanics have also therefore to be collaborative, and in addition must satisfy the main conditions for achieving collaboration: positive interdependence, a common goal, coordination and communication, awareness and joint rewards“ (Echeverría et al., 2011, S.1130).

In Ganita müssen die Spieler eines Teams gemeinsam die Aufgaben auf den Karten lösen, um das gemeinsame Ziel – die Karte bzw. das Spiel gewinnen – zu erreichen. Dafür müssen sie in Form von Diskussion und Konsensfindung kommunizieren. Die Spielmechanismen von Ganita erfüllen also die oben genannten Kriterien, wodurch das Spiel zu einer kooperativen Aktivität wird. Damit bietet Ganita die Möglichkeit, wie weiter oben dargestellt, die mathematischen Fähigkeiten der Schüler im besonderen Maße zu fördern. Durch die gemeinsame Bearbeitung der Aufgabenkarten tragen alle Spieler des Teams mit ihrem Wissen und Können zum Lösen der Aufgabe bei und können so womöglich Aufgaben lösen, die jeder für sich alleine nicht hätte lösen können. Speziell das Voneinander-Lernen wird durch das Spiel angeregt. Einerseits wird es durch das gemeinsame Lösen der Aufgabenkarten angeregt. Andererseits müssen die Spieler in den Aufgaben der Kategorie „Mach dich Verständlich“ sich gegenseitig Begriffe oder Konzepte erklären, sie pantomimisch darstellen oder sie zeichnen. Somit lernen die Spieler die Herangehensweise und Vorstellungen ihrer Mitspieler kennen. Die Studie von Chi, De Leeuw et al. (1994) untermauert den Nutzen der Tabu-Aufgaben und freien Erklär-Aufgaben. Sie konnten zeigen, dass Selbsterklärungen die Integration neuer Informationen in bestehendes Wissen erleichtern sowie das Verständnis verbessern (Chi, De Leeuw, Chiu, & LaVancher, 1994).

Das Konzept der Kreativität wurde schon in Kapitel 5 angesprochen. Dort wurde beschrieben, warum die Schüler durch Ganita angeregt werden, den mathematischen Prozess als kreativen Prozess wahrzunehmen. An dieser Stelle gehen wir kurz darauf ein, warum Ganita die Spieler dazu anregt, selbst aktiv kreativ zu werden.

Der kreative Prozess wird meist als Prozess des Problemlösens verstanden, dessen Ergebnis besonders innovativ gesehen wird und einen bestimmten Bereich nachhaltig beeinflusst und verändert (Botticchio & Vialle, 2009, S.99f; Simon, 1988, S.178). Demnach findet eine kreative Person Probleme, löst sie auf neuartige Weise und kann somit einen wichtigen Beitrag in einem Bereich leisten (Botticchio & Vialle, 2009, S.99).

Um auch das Konzept der Kreativität, die wir als alltägliche Kreativität oder als Kreativität von Kindern beim Spielen und Entdecken verstehen, abzudecken, führt Csikszentmihalyi (1996) die Begriffe *creativity* mit kleinem „c“ und *Creativity* mit großem „C“ ein. *Creativity* entspricht der Form von Kreativität, die im vorherigen Abschnitt beschrieben wurde. Sie findet während der Interaktion zwischen „a culture that contains symbolic rules, a person who brings novelty into the symbolic domain, and a field of experts who recognize and validate the innovation“ (Csikszentmihalyi, 1996, S.6) statt und verändert Bereiche in einem Maße, dass unser Leben davon beeinflusst wird. Mit c*reativity* meint Csikszentmihalyi die

Kreativität, die den Menschen von anderen Spezies unterscheidet. Zu ihr gehört die Kreativität, die Kinder ausüben, wenn sie entdecken, untersuchen und erfinden. Weiterhin sieht er einen Zusammenhang zwischen *Flow* und kreativem Prozess. Demnach empfinden Individuen, die kreativ sind, in ihren Arbeitsgewohnheiten ein *Flow*-Erlebnis (Botticchio & Vialle, 2009, S.101f; Csikszentmihalyi, 1996, S.6ff).

Für ein kreatives Verhalten in einem bestimmten Gebiet braucht es Interesse für das Gebiet und ein gewisses Durchhaltevermögen und Aufmerksamkeit. Somit stellen Motivation und Interesse wichtige Voraussetzungen für den kreativen Prozess dar (Simon, 1988, S.178ff). Wie wir in Kapitel 4 gesehen haben, fördert Ganita die Motivation und das Interesse der Spieler, wodurch die Voraussetzungen für ein kreatives Verhalten der Spieler gegeben sind. Des Weiteren befinden sich die Spieler in keiner Bewertungssituation und bekommen keinen Druck von außen, wodurch sie eher Risiken eingehen und neuartige und kreative Wege einschlagen, um eine Aufgabe zu lösen. Auch die Kooperation der Spieler kann kreatives Verhalten fördern. Sie müssen den anderen ihre Lösungswege erklären und begründen, wodurch jeder Spieler andere Strategien kennenlernt und somit neuen Input bekommt, der ihn womöglich dazu anregt, einen originellen Lösungsweg zu entdecken.

In Kapitel 5.3 sind wir darauf eingegangen, dass durch die Spielfiguren in Ganita und die Biographien im Lexikon das stereotypische Bild des männlichen Mathematikers in Frage gestellt wird. Mädchen wird die Möglichkeit gegeben, Vorbilder zu finden und mittels Modelllernen möglicherweise die Mathematikerin in sich selbst zu entdecken. Ganita hat aber noch weiteres Potential, um Mädchen zu fördern.

Wegen der vorherrschenden männlichen Präsenz in mathematischen Bereichen und der teilweisen Diskrepanz zwischen den schulischen Leistungen von Mädchen und Jungen im Fach Mathematik, sollten Mädchen in besonderem Maße im Bereich Mathematik gefördert werden. Studien zeigen, dass Mädchen ab einem Alter von etwa 16 Jahren schlechter in externen mathematischen Prüfungen abschneiden als Jungen. Ebenfalls lässt die Beteiligung von Frauen in der Mathematik ab diesem Alter stark nach. Frauen scheinen durch die aktuelle mathematische Bildung benachteiligt zu werden und viele berufliche Möglichkeiten bleiben ihnen verschlossen (Ernest, 2004, S.274). Zwar beziehen sich diese Aussagen auf Großbritannien, können aber sicherlich zu einem großen Teil für ähnlich kulturell geprägte Regionen, wie z. B. Deutschland, übernommen werden.

Auch Grigutsch (1997) fand in seiner Studie Unterschiede in den Mathematik- und Selbstbildern von Jungen und Mädchen. Jungen jeden Alters neigten eher dazu, Mathematik als problembezogenen Verstehens- und Erkenntnisprozess zu sehen, während Mädchen ab

Klasse 12 dem Lernen und Ausführen von Routinen und Schemata eine größere Bedeutung zuwiesen. Jungen schätzten, bei objektiv ähnlicher Leistung, ihre Leistung höher ein als Mädchen und hatten ein positiveres mathematisches Selbstbild. Ab der 9. Klasse schätzten Mädchen ihren Fleiß höher ein als Jungen. Mädchen und Jungen scheinen also geschlechtsspezifische mathematische Selbstbilder und mathematikbezogene Überzeugungen zu haben (Grigutsch, 1997, S.254).

Ursachen für diese Probleme sieht Ernest sowohl im institutionellen Sexismus im Bildungsbereich als auch im Sexismus innerhalb der Gesellschaft. Ersterer zeigt sich unter anderem darin, dass Mathematik als männliches Fach gesehen wird, die Bewertungsformen oft kompetitiv und die Texte und Arbeitsblätter geschlechtsspezifisch sind und Stereotypen aufweisen. Zudem werden häufiger individualistische anstatt mündlicher und kooperativer Lehrmethoden verwendet und den Mädchen fehlt es an weiblichen Rollenmodellen (Ernest, 2004, S.274f). Der Lehrer nimmt ebenso eine wichtige Rolle ein, da durch ihn der institutionelle Sexismus, wenn auch nicht gewollt, vermittelt wird (Ernest, 2004, S.278).

Angegangen werden können die Ursachen einerseits konkret im Unterricht, andererseits muss der Sexismus allgemein in der Gesellschaft angegangen werden. Die Unterrichtsmaterialien sollten nicht geschlechtsspezifisch sein, Mädchen sollten genügend weibliche Rollenmodelle angeboten werden und ihnen sollte geholfen werden, positive mathematische Selbstbilder und Einstellungen zu entwickeln. Weiterhin sollte gegen den institutionellen Sexismus von Lehrern, Unterrichtsmaterialien und gegen die kulturellen Definitionen von Gender vorgegangen werden. Auf epistemologischer Ebene sollte die Sichtweise auf Wissen, insbesondere auf Mathematikwissen verändert werden. Ernest sieht die absolutistische Sichtweise als für alle problematisch an (Ernest, 2004, S.277ff).

Ganita bietet Mädchen, wie schon in Kapitel 5.3 erläutert, viele weibliche Rollenmodelle an. Bei der Aufgabenformulierung wurde darauf geachtet, keine Stereotypen sowie beide Geschlechter etwa gleichhäufig zu verwenden. So gibt es z. B. auch eine Busfahrerin, das Brot wird sowohl von Lisa als auch Christian geschnitten und Anna und Max fahren beide Fahrrad. Ein weiterer Vorteil für Mädchen ist, dass im Großteil des Spiels die Spieler mündlich kommunizieren und zusammenarbeiten müssen. Positive mathematische Selbstbilder können durch die Erfolgserlebnisse beim Lösen der Aufgabenkarten entwickelt werden. Dieser Punkt trifft auf beide Geschlechter zu.

Die Möglichkeiten, die Ganita bietet, um die mathematischen Fähigkeiten von Schülern zu fördern, liegen also auch in der kooperativen Komponente des Spiels. Weiterhin birgt Ganita das Potential, das kreative Verhalten der Schüler zu fördern sowie insbesondere Mädchen in ihrem mathematischen Selbstbild und ihren mathematischen Fähigkeiten zu stärken. Zusammenfassend zeigt dies einen Ausblick, welche Aspekte noch vielversprechend für zukünftige Untersuchungen sind.

Eine Option, Ganita auszubauen, wäre es, das Spiel für Anfängervorlesungen in Mathematik an der Universität zu konzipieren. Die Spielmechanismen könnten übernommen werden, inhaltlich würden sich die Aufgaben an Oberstufen- und/oder Hochschulstoff orientieren.

7. Evaluation

7.1. Vorgehen

Ganita wurde im Rahmen von vier Unterrichtsbesuchen in drei 6. Klassen und einer 7. Klasse eines Tübinger Gymnasiums getestet, um erste Rückmeldungen zum Spiel und mögliche Verbesserungsvorschläge zu erhalten. Insgesamt spielten 94 Schüler das Spiel, von denen 17 Schüler in der 7. Klasse und jeweils 25, 28 bzw. 30 Schüler in den 6. Klassen waren. Pro Klasse wurden zwischen drei und fünf Spiele benötigt. Die Schüler fanden sich eigenständig in Gruppen an jeweils einem Spieltisch zusammen. An jedem Tisch befanden sich zwischen fünf und zehn Spieler, die sich in Zweier- oder Dreierteams einteilten. Es waren mindestens zwei erwachsene Personen anwesend, um das Spiel zu begleiten und die Schüler zu unterstützen. Für das Spiel wurde immer eine Doppelstunde verwendet, von der etwa 50 Minuten reine Spielzeit waren.

Im Vorfeld wurden die Aufgabenkarten aussortiert, auf denen Themen auftauchen, die die Schüler noch nicht zuvor im Unterricht behandelt hatten und die auch nicht im Lexikon erklärt werden. Die Rückmeldung zum Spiel erfolgte über Fragebögen, die nach dem Spielen an die Schüler ausgeteilt wurden, und durch Beobachtung der Schüler während des Spielens.

Auf den Fragebögen mussten die Schüler das Spiel zunächst mit einer Note bewerten („Hat dir das Spiel gefallen? Gib bitte eine Schulnote von 1 bis 6.“). Die Aspekte, die sie positiv an Ganita bewerteten, wurden durch folgende Fragen ermittelt:

> „Was hat dir am Spiel am besten gefallen?“
> „Würde es dir Spaß machen, Ganita im Unterricht zu spielen? Warum (nicht)?“
> „Würdest du Ganita zu Hause spielen? Warum (nicht)?“

Negative Aspekte und Verbesserungsvorschläge überprüften folgende Fragen:

> „Was hat dir am Spiel nicht gefallen?“
> „Was fehlt bei dem Spiel?“

Die mathematikbezogenen Überzeugungen der Schüler nach dem Spiel wurden mit folgender Frage ermittelt:

> „Findest du Mathematik nach dem Spiel
> a) interessanter b) relevanter c) spaßiger d) genauso wie vorher f) _____“

Ob die Schüler zusammengearbeitet haben, wurde durch folgende Frage überprüft:

> „Habt ihr zusammengearbeitet und wenn ja wie?“

Ein möglicher Lerneffekt wurde mittels folgender Fragen festgestellt:

„Gab es Fragen bei denen deine Kenntnisse aus der Schule nicht ausgereicht haben, um sie zu beantworten? Wenn ja welche?“
„Was hast du Neues gelernt?“

In Bezug auf die Kreativität beim Lösen der Aufgaben, mussten die Schüler folgende Frage beantworten:

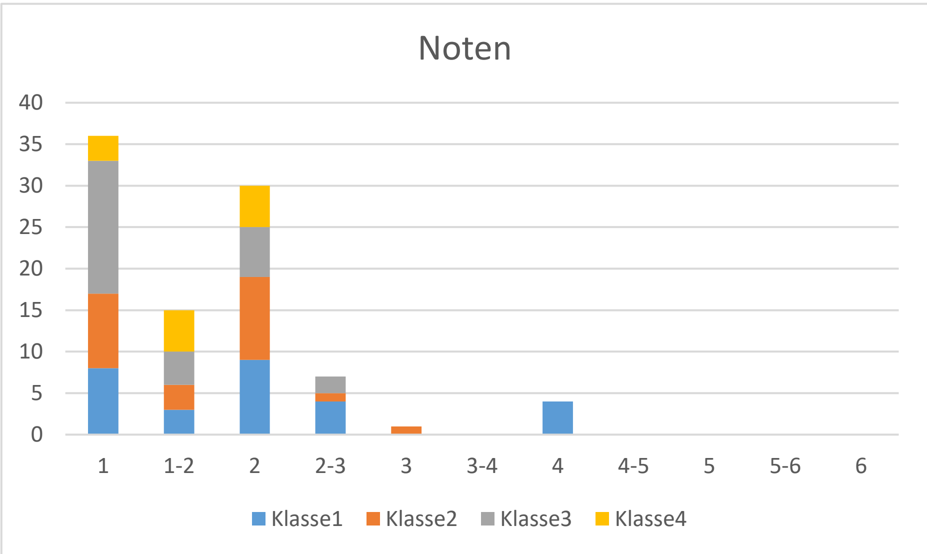
„Musstest du kreativ sein, um die Fragen zu beantworten? Nenne ein Beispiel.“

Beim Erstellen des Fragebogens, wurde darauf geachtet, offene Fragestellungen zu verwenden, um eine differenzierte und aussagekräftige Rückmeldung zu erhalten. So wurden die Schüler nicht nur gefragt, ob sie zusammengearbeitet haben, sondern auch wie sie zusammengearbeitet haben, oder sie mussten Beispiele angeben. Zudem gab es noch eine Freitextaufgabe („Freitext: Gibt es noch etwas, das du sagen möchtest?“).

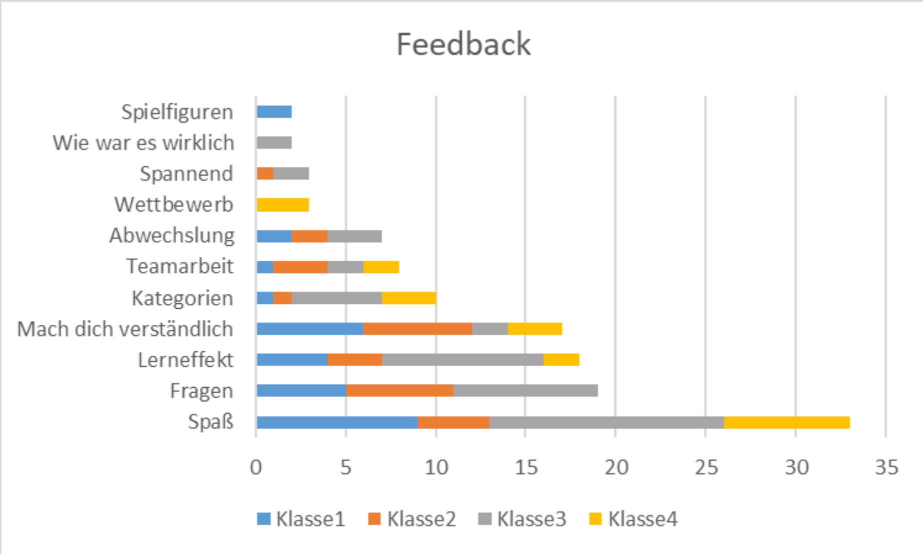
Es sollte betont werden, dass es sich um keine empirische Studie, sondern um Eindrücke handelt, die durch die Fragebögen und Beobachtungen gewonnen wurden und die Thesen der Arbeit lediglich erste Hinweise geben können, ob die Thesen zutreffen.

7.2. Ergebnisse

Die Schüler gaben Ganita eine Durchschnittsnote von 1,67. Noten mit Plus und Minus wurden jeweils zur ganzen Note dazugerechnet. In allen Diagrammen ist die 7. Klasse die Klasse 4.

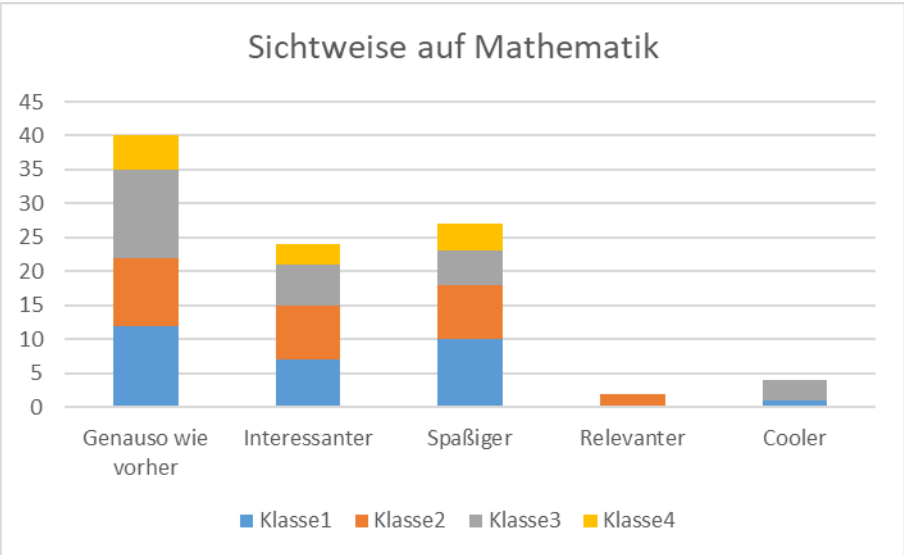


Als positiven Punkt nannten die Schüler am häufigsten den Spaß, den sie am Spiel hatten (33 Schüler). Zu dieser Kategorie wurden auch Freude und weitere Synonyme gezählt. Als



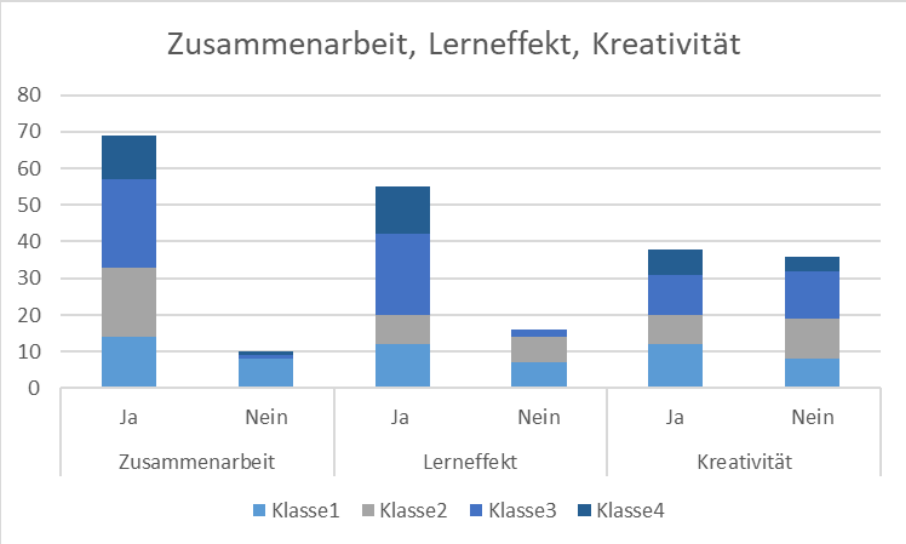
weitere Aspekte, die die Schüler positiv an Ganita bewerteten, wurden die Fragen auf den Aufgabenkarten (19 Schüler) und dass sie etwas gelernt haben (18 Schüler), genannt. Die Kategorien „Mach dich verständlich" und „Wie war es wirklich" wurden von 17 bzw. zwei Schülern explizit genannt, weil sie ihnen besonders gefallen haben. Von zehn Schülern wurden ganz allgemein die verschiedenen Kategorien genannt, als ein Aspekt, der ihnen besonders gut am Spiel gefallen hat. Auch gefiel den Schülern die Teamarbeit (8 Schüler), dass das Spiel eine Abwechslung zum herkömmlichen Mathematikunterricht ist (7), die Wettbewerbskomponente des Spiels (3 Schüler), die Spannung im Spiel (3 Schüler) und die Spielfiguren (2 Schüler).

40 Schüler fanden Mathematik nach dem Spiel genauso wie vorher, 24 interessanter, 27



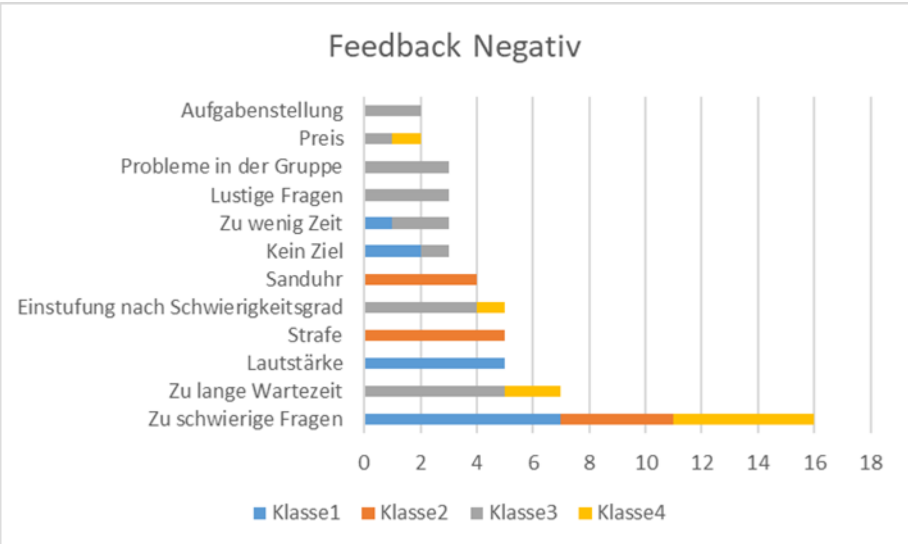
spaßiger, vier cooler und zwei Schüler fanden das Fach relevanter verglichen mit ihrer Sichtweise vor dem Spiel.

Die Mehrheit der Schüler (69) berichtete, dass sie während des Spiels zusammengearbeitet hat. Sie nannten oft Verben wie „beraten“, „besprechen“, etc., um ihre Zusammenarbeit zu beschreiben. Zehn Schüler verneinten die Frage nach der Zusammenarbeit.



55 Schüler gaben an, dass sie etwas durch das Spiel gelernt haben, während 16 Schüler angaben, dass sie nichts gelernt haben. Als Antwort auf die Frage „Was hast du Neues gelernt?“ schrieben sie z. B. „Was ein konvexer Körper ist“ oder „Zahlen die man ordnen muss und dann die Mittlere nimmt“. Mit der letzten Antwort war der Median gemeint.

In Bezug auf die Kreativität waren die Antworten sehr ausgeglichen. 38 Schüler gaben an, dass sie bei der Beantwortung der Fragen kreativ sein mussten, während 36 Schüler die Frage verneinten. Als Beispielaufgaben wurden häufig die Pantomimeaufgaben genannt. Ein Schüler oder eine Schülerin antwortete auf die Frage mit: „Ja, weil man ein paar antworten nicht kennt. Und dan logisch nachdenken muss.“. Ein anderer oder eine andere schrieb: „nein es war alles klar“. Insgesamt beantworteten 74 von 94 Schülern die Frage.



Am häufigsten (16 Schüler) nannten die Schüler als negativen Punkt, dass die Aufgaben zu schwierig waren. Sieben Schüler gaben an, dass man zu lange warten musste, bis das eigene Team wieder an der Reihe war und fünf Schüler empfanden die Lautstärke als negativ. Fünf Schüler schlugen vor, eine Strafe für falsche Antworten einzuführen. Weitere fünf Schüler schlugen vor, die Aufgabenkarten nach Schwierigkeitsgrad zu ordnen. Vier Schüler bemängelten, dass es nur eine Sanduhr gibt, und drei Schüler gaben an, dass die Zeit zu kurz sei, um die Fragen zu beantworten. Drei Schülern fehlte ein Ziel und drei Schüler schlugen vor, lustige Fragen miteinzubinden. Von Problemen innerhalb der Gruppe berichteten drei Schüler. Zwei Schüler bewerteten die Aufgabenstellung negativ und ebenfalls zwei Schüler nannten einen Preis für die Gewinner als Verbesserungsvorschlag.

In allen vier Klassen konnten wir eine große Begeisterung und Motivation seitens der Schüler beobachten. Sie ließen sich, bis auf einen Spieltisch, alle auf das Spiel ein und spielten aufmerksam und konzentriert. Während der Spielzeit lachten sie und hatten Spaß. Besonders motivierend wirkten auf sie die Aufgaben, bei denen sie sich aktiv bewegen mussten. Auch konnte beobachtet werden, dass sie viel miteinander über die Aufgaben diskutierten und versuchten, sich auf eine Lösung im Team zu einigen.

7.3. Schlussfolgerungen

Grundsätzlich zeigte sich, dass eine Anzahl von acht Schülern pro Spieltisch, die sich in drei Zweierteams aufteilten, besonders gut funktioniert hat. Die Lautstärke war an diesen Tischen angenehm, die Schüler konnten gut zusammenarbeiten und waren konzentriert. Weiterhin war es sehr nützlich, vor dem ersten Spielen gemeinsam die wichtigsten Spielregeln zu besprechen. Die Schüler waren manchmal verunsichert, da sie manche Antworten (z. B. die geschichtlichen Aufgaben) gar nicht wissen konnten. Es ist deshalb sinnvoll, ihnen im Voraus zu sagen, dass sie nicht jede Antwort wissen können und es dafür das Lexikon gibt.

Die Rückmeldung war insgesamt überwiegend positiv. Viele Schüler fragten, wo sie das Spiel kaufen könnten und wollten es nochmal spielen. Auch die hohe Anzahl der Schüler, die angegeben hat, dass sie Spaß beim Spielen hatte, zeigt, dass sie das Spiel gut aufgenommen haben. Ebenso zeugt Spaß auch von einer hohen Motivation der Schüler. Ein Schüler oder eine Schülerin bejahte die Frage „Würde es dir Spaß machen, Ganita im Unterricht zu spielen?“ mit der Begründung: „Man lern etw. ohne es zu bemerken“. Diese Antwort ist ein Hinweis auf eine *Flow*-Erfahrung des Schülers oder der Schülerin sein. Er oder sie war während des Spielens im *Flow* und hat deswegen nicht mitbekommen, dass ein Lernprozess stattfindet, der ihm oder ihr sonst vielleicht mühselig erscheint.

Den Schülern haben die Fragen und Aufgabenstellungen größtenteils gut gefallen. Das gibt Hinweise darauf, dass Ganita Themen und Aufgaben beinhaltet, die das Interesse der Schüler wecken und somit intrinsische Motivation erzeugen.

Zwar wurden mit der Frage

„Findest du Mathematik nach dem Spiel

a) interessanter b) relevanter c) spaßiger d) genauso wie vorher f) _____"

nicht explizit die mathematischen epistemologischen Überzeugungen der Schüler gemessen, trotzdem können die Antworten Hinweise auf mögliche Überzeugungs- oder Einstellungsänderungen geben. Die Mehrheit änderte ihre Sichtweise auf Mathematik nicht. Dies kann der kurzen Zeitspanne (Ganita wurde nur einmal in einer Doppelstunde gespielt) und der fehlenden Einbindung in den restlichen Unterricht geschuldet sein. Trotzdem gab eine nicht geringe Anzahl an Schülern an, dass sie Mathematik nach dem Spiel spaßiger oder interessanter fand. Dies lässt darauf schließen, dass sie durch den Spaß am Spielen und den Themen im Spiel eine positivere Einstellung erworben haben. Um verlässlichere Aussagen über den möglichen Einfluss, den Ganita auf die mathematikbezogenen Überzeugungen der Schüler hat, zu bekommen, sollten die Überzeugungen mittels geeigneter Fragen, bevor die Schüler das Spiel kennen und nach mehrmaligem Spielen über einen längeren Zeitraum hinweg sowie nach einer geeigneten Einbettung in den Unterricht, gemessen und verglichen werden.

Die große Anzahl der Schüler, die angab, dass sie zusammengearbeitet hat, lässt darauf schließen, dass Ganita die Zusammenarbeit fördert und somit kooperatives Lernen ermöglicht. Die Schüler, die nach eigenen Angaben nicht zusammengearbeitet haben, gaben keinen Grund dafür an. Es könnte aber Problemen innerhalb der Gruppe geschuldet sein, weswegen bei der Einteilung der Gruppen und Teams darauf geachtet werden sollte, dass sich die Schüler untereinander verstehen.

Dass Ganita einen Wissenserwerb fördert, wird ebenfalls durch die Schülerantworten untermauert. Die meisten Schüler bejahten die Frage, ob sie neue Kenntnisse gebraucht haben, um die Aufgaben zu lösen. Zudem konnten sie Beispiele für das, was sie neu gelernt hatten nennen. Ein Schüler bzw. eine Schülerin antwortete auf die Frage „Was hast du Neues gelernt?": „Zahlen die man ordnen muss und dann die Mittlere nimmt". Damit meinte er oder sie den Median. Ein anderer oder eine andere antwortete: „Was ein konvexer Körper ist". Diese Antworten zeigen, dass sowohl Begriffe als auch Konzepte erinnert wurden.

Die Antworten auf die Frage nach der Kreativität beim Lösen der Aufgaben sind zwiespältig. Die Schüler, die angaben, dass sie kreativ sein mussten, nannten oft die

Pantomimeaufgaben als Beispiel. Dies lässt darauf schließen, dass für sie die pantomimische Darstellung oder die Überlegung, wie sie etwas pantomimisch darstellen können, ein kreativer Prozess ist. Die Antwort „Ja, weil man ein paar antworten nicht kennt. Und dann logisch nachdenken muss.“ weist darauf hin, dass der Schüler oder die Schülerin Kreativität beim Prozess der Lösungsfindung enthalten sieht. Er oder sie muss verschiedene Lösungsansätze entwickeln und einen Weg finden, um die unbekannte Aufgabe zu lösen. Dabei muss er oder sie kreativ sein. Die Antwort „nein es war alles klar“ zeugt von einem anderen Verständnis von Kreativität. Man muss nur kreativ sein, wenn etwas nicht verständlich ist. Dass viele Schüler gar nicht auf die Frage geantwortet haben, weist darauf hin, dass sie nicht wissen, was sie unter Kreativität im Zusammenhang mit Mathematik verstehen sollen.

Es stellt sich die Frage, wie wir den negativen Aspekten, die von den Schülern genannt wurden, begegnen und ob wir ihre Verbesserungsvorschläge einarbeiten konnten. Der negative Punkt, der am häufigsten genannt wurde, war, dass die Aufgaben zu schwierig seien. Eine Möglichkeit, diesem Problem zu begegnen ist, dass der Lehrer die Aufgaben zuvor sortiert, um zu vermeiden, dass die Schüler mit Themen konfrontiert werden, die sie zuvor noch nicht behandelt haben. Andererseits sind die etwas schwierigeren Aufgaben Teil des Spielkonzepts. Die Schüler sollen erkennen, dass es in der Mathematik Herausforderungen gibt, die ihnen zunächst sehr schwierig erscheinen, da sie nicht sofort den Lösungsweg wissen, aber die sie trotzdem überwinden können, wenn sie sich anstrengen. Für den Lehrer bietet es sich in diesem Rahmen an, die Schüler auf diesen Aspekt der Mathematik aufmerksam zu machen oder die Aufgaben, die viele Schüler schwierig empfanden, im Unterricht aufzugreifen.

Um dem Problem der zu langen Wartezeit zu entgegnen, haben wir (die Autorinnen) die Spielregeln geändert. Es dürfen nur noch maximal drei Karten hintereinander gewonnen werden, wodurch vermieden wird, dass ein Team beliebig lange an der Reihe sein kann. Ebenfalls wurde zu den Spielen eine zweite Sanduhr hinzugefügt, damit die Spieler nicht warten müssen bis die Sanduhr durchgelaufen ist, um die nächste Aufgabe bearbeiten zu können.

Die Lautstärke wurde nicht nur von den Schülern auf dem Fragebogen genannt, sondern konnte auch von uns (den Lehrerinnen und mir), während die Schüler spielten, als wichtiger Faktor identifiziert werden. Eine zu hohe Lautstärke im Klassenzimmer wirkte sich negativ bei allen Gruppen aus und die Schüler beschwerten sich, dass sie sich nicht konzentrieren könnten. Es muss keine absolute Stille herrschen, aber ein angenehmer Geräuschpegel, der die Aufmerksamkeit und Konzentration der Schüler nicht stört, sollte gewährleistet werden. Dafür sollte die Anzahl der Schüler pro Tisch und pro Team nicht zu hoch sein.

Von der Einführung einer Strafe sehen wir ab, da die Motivation, die durch das Androhen einer Strafe hervorgerufen wird, eher extrinsisch als intrinsisch ist. Ebenso ziehen wir es vor die Karten nicht nach Schwierigkeitsgrad einzuteilen, da die Karten dann nicht mehr zufällig gezogen werden würden und die Glückskomponente fehlt, die, wie in Kapitel 3 erläutert, motivierend wirken kann.

Lustige Fragen haben wir versucht einzubauen. Natürlich gibt es keine Garantie, dass auch die Spieler die Fragen lustig finden. Es kann aber ebenfalls sein, dass die Schüler während der Unterrichtsbesuche noch auf keine lustige Frage gestoßen sind, da sie nicht alle Aufgabenkarten gesehen haben.

Ein paar Schüler schlugen vor einen Joker einzubauen, bei dem die Spieler z. B. den Lehrer nach einer Antwort fragen dürfen. Diese Regel wurde in Form einer Spielvariante mit in die Spielregeln aufgenommen.

Da einige Schüler äußerten, dass sie ein Ziel oder einen Preis bzw. eine Belohnung gut fänden, haben wir versucht das in den Spielregeln zu berücksichtigen. Die Teams bekommen nun einen Punkt für jede gewonnene Karte. Eine weitere Möglichkeit besteht darin, eine Art Projekt als übergeordnetes Ziel vorzugeben. Das Team, das das Projekt als erstes erfolgreich beendet, gewinnt. Ein Beispiel für ein Projekt wäre der Soma-Würfel. Die Teams erhalten je gewonnener Aufgabenkarte ein weiteres Bauteil für den Würfel und müssen dann versuchen die Teile zu einem Würfel zusammenzufügen.

8. Anhang und Informationen zur Verfügbarkeit des Spiels

Ganita kann auf der Webseite https://imaginary.org/ kostenlos heruntergeladen werden. In naher Zukunft kann man es dort auch für die Herstellungskosten fertig erwerben, um sich die Mühen des Bastelns zu ersparen.

Im Anhang befinden sich die Spielregeln, das Lexikon und die Aufgabenkarten.

GANITA

Spielregeln

GANITA

Mathematik mal ganz anders!
Für 4 - 36 Spieler, ab der 6. Klasse

Spielmaterial
1 Spielbrett
8 Spielfiguren:

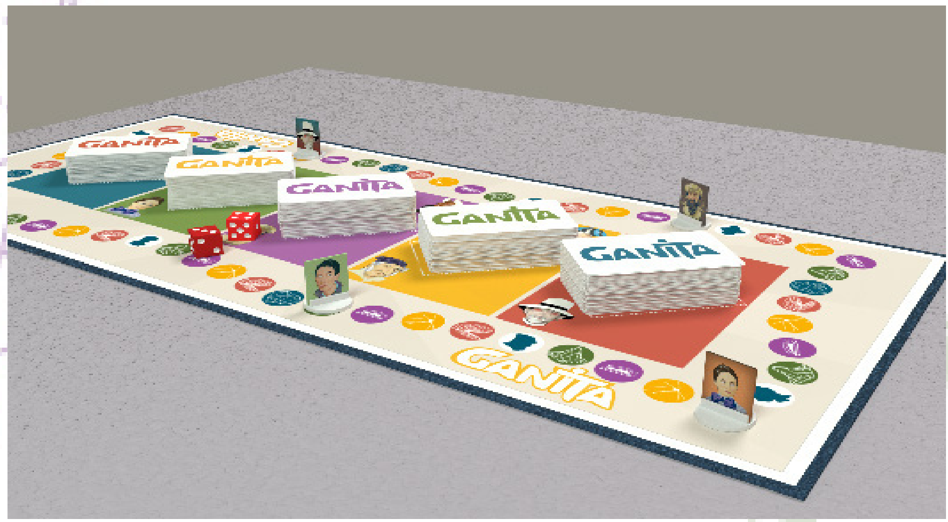
- Emmy Noether
- Maryam Mirzakhani
- Hypatia von Alexandria
- Katherine G. Johnson
- Carl Friedrich Gauß
- David Hilbert
- Pythagoras von Samos
- Leonhard Euler

2 Sanduhren
3 Würfel
1 Lexikon
1 Lehrerbegleitheft

Das müsst ihr beim ersten Spielen wissen:

Spielvorbereitung

Bildet Gruppen mit mindestens vier SpielerInnen. Jede Gruppe erhält ein Spiel und teilt sich in Teams mit mindestens zwei SpielerInnen auf. Jedes Team sucht sich zu Beginn eine Spielfigur aus, die es auf das Feld stellt, auf dem die Spielfigur abgebildet ist. Die Aufgabenkarten legt ihr so auf die entsprechenden Felder, dass „Ganita" zu sehen ist. Legt euch Papier und Stifte bereit.



Spielverlauf

Welches Team beginnt wird ausgelost (z.B. Schere, Stein, Papier). Danach wird im Uhrzeigersinn weitergespielt. Beim allerersten Spielzug von jedem Team wird nicht gewürfelt, sondern direkt eine Karte vom Stapel einer beliebigen Kategorie gezogen. Bei allen weiteren Spielzügen geht jedes Team so viel Schritte, wie die Augenzahl, die es gewürfelt hat. Es wird immer mit einem Würfel gewürfelt. In welche Richtung ihr geht, ist euch überlassen. Das Team zu eurer Linken zieht dann eine Karte von dem Stapel der Kategorie auf deren Feld ihr gelandet seid. Ihr dürft die Karte nicht ansehen! Die weißen Felder mit den Köpfen der MathematikerInnen gehören zur Kategorie „Wie war es wirklich?". Das linke Team liest euch die Aufgabe vor und dreht danach die Sanduhr um. Ab da an habt ihr eine Minute Zeit, um die Aufgabe zu lösen. Bei allen Aufgaben kann es eine, keine oder mehrere richtige Lösungen geben. Ihr dürft schreiben, zeichnen und miteinander reden, um die Aufgabe zu lösen. Nur bei der Kategorie „Mach dich verständlich" wird die Aufgabenstellung nicht laut vorgelesen, sondern nur einer zuvor ausgewählten Person aus eurem Team gezeigt, die dann den Begriff erklären, zeichnen oder pantomimisch darstellen muss. Falls es einen Tipp auf der Karte gibt, wird dieser allen SpielerInnen laut vorgelesen. Gibt es ein Bild auf der Karte, wird sie mit zugehaltener Lösung auch dem Team gezeigt, das die Aufgabe lösen muss. Schafft ihr es die Aufgabe in der vorgegebenen Zeit zu lösen, dürft ihr die Karte behalten und legt sie vor euch ab. Die Karte entspricht einem Punkt. Dann seid ihr nochmals an der Reihe und würfelt erneut. Ihr könnt höchstens drei Karten hintereinander gewinnen, dann ist das nächste Team an der Reihe. Könnt ihr die Aufgabe nicht lösen, wird die Karte wieder unter den Stapel der jeweiligen Kategorie gelegt. Dann ist das nächste Team am Zug. Die Spieldauer könnt ihr selbst festlegen.

Ziel des Spiels

Ziel des Spiels ist es, so viele Karten wie möglich zu gewinnen. Das Team, das am Ende am meisten Karten besitzt, hat das Spiel gewonnen. Besitzen zwei oder mehr Teams gleich viele Karten, dann gibt es mehrere Sieger.

Weitere Informationen

Sonderregeln

Lexikon: Falls ihr einen Begriff auf den Aufgabenkärtchen nicht kennt, dürft ihr ihn im Lexikon nachschlagen. Solange wird die Zeit angehalten. Für alle Begriffe, die im Lexikon erklärt werden, gibt es Querverweise in Form von Pfeilen. Diese Regel gilt nicht für die Personen, die in den Aufgabenstellungen auftauchen.

Jeder gegen Jeden: Kommt ihr mit eurer Spielfigur auf ein Feld, das schon von einem anderen Team besetzt ist, macht ihr zuerst ganz normal euren Spielzug und löst eine Aufgabe der jeweiligen Kategorie. Danach zieht eine Person aus eurem Team eine Karte von der Kategorie „Mach dich verständlich" und macht die Aufgabe. Beide Teams, die eine Spielfigur auf dem Feld stehen haben, dürfen mit raten. Das Team, das zuerst den gesuchten Begriff oder die gesuchte Zahl errät, gewinnt die Karte. Errät keines der beiden Teams den Begriff in der vorgegebenen Zeit, wandert die Karte wieder unter den Stapel.

Joker: Kommt ihr auf ein Feld, auf dem eure Spielfigur abgebildet ist, dürft ihr in der nächsten Runde auf ein Feld eurer Wahl gehen und müsst nicht würfeln.
Zwei Sanduhren: Sind neben der Aufgabenstellung zwei Sanduhren abgebildet, dann habt ihr zwei Minuten Zeit, um die Aufgabe zu lösen.

Spielvarienten

Es wird eine Größe von sechs SchülerInnen pro Spiel mit jeweils drei zweier Teams empfohlen. Ihr könnt aber auch mit der gesamten Klasse spielen und das Spielbrett z.B. über einen Beamer an die Wand projizieren. Ihr könnt auch spielen ohne die Zeit zu stoppen. Dann habt ihr beliebig lange Zeit, um eine Aufgabe zu lösen.
Den Joker könnt ihr variieren. Eine Möglichkeit wäre zum Beispiel, dass man die nächste Karte ziehen darf, wenn man die Aufgabe nicht lösen kann oder dass man den oder die LehrerIn fragen darf.

Kategorien

Begreife die Welt!

Ziel dieser Kategorie ist es, dass ihr die Welt und die Mathematik in ihr begreift. Bei den Schätzfragen sollt ihr Größen und Maße sinnvoll einschätzen. Um eine Karte zu gewinnen, muss eure Schätzung im angegebenen Bereich auf der Aufgabenkarte liegen. Ihr werdet sehen, dass ihr darin schnell besser werdet, je mehr Aufgaben ihr dazu löst. Vielleicht kennt ihr schon einige Bereiche, in denen Mathematik auftaucht oder gebraucht wird. Mit Sicherheit werdet ihr aber noch mehr Bereiche entdecken und vielleicht sogar die ein oder andere Überraschung erleben.

Finde es heraus!

In dieser Kategorie sollt ihr euer mathematisches Wissen anwenden oder auch neues Wissen erwerben. Ihr müsst die richtige Antwort auf eine Frage finden, eine Frage mit „Ja“ oder „Nein“ beantworten, eine Aussage mit „Wahr“ oder „Falsch“ bewerten, eine Rechenaufgabe lösen oder auch den Fehler in einer Rechenaufgabe finden. Manchmal gibt es auch kleine Rätselaufgaben oder Fangfragen, also nehmt euch in Acht!

Mach dich verständlich!

In dieser Kategorie sollt ihr mathematische Begriffe den anderen aus eurem Team so verständlich wie möglich vermitteln. Ihr müsst die Begriffe dabei entweder erklären, ohne einige verbotene Wörter zu benutzen, sie zeichnen oder pantomimisch darstellen. Die anderen dürfen laut raten. Wer erklärt wird vom Team festgelegt, es sollten aber alle SpielerInnen in etwa gleich oft drankommen. Nur die Person, die ausgewählt wurde, darf die Aufgabenkarte sehen. Wird eine Karte gezogen, bei der eine Person sich einen Begriff oder eine Zahl ausdenken muss, dann schreibt sie diesen/diese geheim auf einen Zettel und versteckt ihn. Die anderen SpielerInnen aus dem Team müssen durch Ja-Nein-Fragen auf die richtige Lösung kommen.

Sei kreativ!

Hier werdet ihr viele neue mathematische Inhalte kennenlernen. Dabei geht es nicht darum, eine neue Formel auswendig oder ein Schema F zu lernen. Wie ihr die Aufgaben löst, ist euch überlassen. Ihr sollt euren eigenen Weg und eure eigene Lösungsstrategie finden. Natürlich dürft ihr dazu auch im Team arbeiten und euch gegenseitig unterstützen. Ihr dürft viel ausprobieren und versuchen euch etwas anhand einfacher Beispiele klarzumachen. Lasst euren Ideen freien Lauf!

Wie war es wirklich?

Da ihr die Mathematik meistens nur in Form von Rechnungen und Aufgaben kennt, habt ihr in dieser Kategorie die Möglichkeit Hintergründe und wichtige Personen, die die Mathematik geprägt haben, kennenzulernen. Dazu bekommt ihr Fragen zur Geschichte oder zu einer bestimmten Person gestellt. Ihr bekommt einen Einblick in die Entstehung der Mathematik und ihre Entwicklung über die Jahrhunderte hinweg. Es gibt viele interessante Dinge und Personen zu entdecken. Ein kleiner Tipp: Wenn ihr zuvor ein bisschen im Lexikon stöbert, werdet ihr manche Fragen einfacher beantworten können.

Sonstiges

Steht auf der Aufgabenkarte statt „Lösung“ das Wort „Beispiel“ oder „z.B.“, dann gibt es mehrere (oder unendlich viele) richtige Lösungen. Es ist dann die Aufgabe aller Spieler zu entscheiden, ob die gegebene Antwort richtig oder falsch ist. Ihr müsst dabei auf euer eigenes Urteilsvermögen vertrauen!

GANITA

Autorinnen: Prof. Dr. Carla Cederbaum, Anja Fetzer
Spielentwicklung: Prof. Dr. Carla Cederbaum, Dr. Elke Müller
Aufgabenerstellung: Prof. Dr. Carla Cederbaum, Anja Fetzer, Lea Lange, Dr. Elke Müller
Spieltest: Prof. Dr. Carla Cederbaum, Dr. Elke Müller, Stephanie Schiemann
Grafik und Design: Michael Féaux

Ganita wurde getestet in Kooperation mit der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

GANITA

Das Lexikon

GANITA

1. Teil: Personen

Archimedes von Syrakus (ca. 287 – 212 v. Chr.)

Archimedes war ein griechischer Gelehrter, der große Fortschritte in der Mathematik, aber auch in der Physik und Technik erzielte. Er kämpfte auf Seiten des Königs von Syrakus gegen die römische Belagerung und starb schließlich bei der Eroberung der Stadt. Während des Krieges wurden unter anderem von ihm entwickelte Wurfmaschinen eingesetzt. Trotzdem schätzte er die Theorie mehr als die Praxis und lieferte wichtige Beiträge in der Physik, wie z.B. die Hebelgesetze und das archimedische Prinzip, und in der Mathematik. So kannte Archimedes schon die Kreiszahl Pi ↪ (ohne sie so zu nennen), da er herausfand, dass sich der Umfang eines Kreises so zu seinem Durchmesser verhält, wie sein Flächeninhalt zum Quadrat seines Radius'. Auch wurde das Archimedische Axiom nach ihm benannt, wobei dieses schon von einem anderen Mathematiker formuliert wurde, und das so genannte Rinderproblem lässt sich auf ihn zurückführen. Er berechnete die Anzahl an Sandkörnern, die man brauchen würde, um das ganze Universum damit zu füllen. Nur stellte man sich damals das Universum noch um einiges kleiner vor als heute.

Bernoulli, Jakob I. (6.8.1655 – 16.8.1705)

Jakob I. Bernoulli kam aus der Schweiz, studierte Philosophie und Theologie und beschäftigte sich gegen den Willen seines Vaters intensiv mit der Mathematik und Physik. Ihm sind wichtige Fortschritte vor allem im Bereich der Wahrscheinlichkeitstheorie ↪ zu verdanken. Er formulierte das schwache Gesetz der großen Zahlen, welches den Grundstein für das starke Gesetz der großen Zahlen lieferte. Dieses besagt, dass sich die relative Häufigkeit eines Ergebnisses (z.B. eine 6 Würfeln) immer mehr der Wahrscheinlichkeit „annähert", je öfter man einen Versuch (unter gleichen Bedingungen) durchführt. Würfelt man z.B. 420×, so ist es wahrscheinlicher davon 70× eine 6 gewürfelt zu haben, wie bei 42× Würfeln 7× eine 6 gewürfelt zu haben. In der Schule lernt man die Bernoulli-Kette kennen, eine Versuchsreihe, bei der es nur zwei mögliche Ergebnisse gibt (z.B. Lose ziehen). Nach Bernoulli sind sogar eine bestimmte Zahlenfolge, die Bernoulli-Zahlen, und eine Ungleichung, die Bernoullische Ungleichung, benannt.

Buffon
(7.9.1707 – 16.4.1788)

Comte de Buffon, eigentlich Georges-Louis Leclerc, war ein französischer Wissenschaftler, der aus einer sehr wohlhabenden Familie stammte. Er studierte zwar Mathematik und forschte an einigen interessanten Problemen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, wie z.B. dem Sankt-Petersburg Paradoxon oder dem Buffonschen Nadelproblem ↪, wurde aber vor allem durch seine Beiträge zur Biologie berühmt. So vertrat er die Ansicht, im Gegensatz zu Carl von Linné, dass die Natur viel zu umfangreich wäre, als dass man sie in einem hierarchischen System klassifizieren könnte. Er glaubte vielmehr an die evolutionäre Idee, dass sich alle Lebewesen über einen langen Prozess mit verschieden Stufen hinweg entwickelt hätten. Er war der Überzeugung, dass die Erde durch den Zusammenstoß eines Kometen mit der Sonne entstand und schätzte das Alter der Erde durch verschiedene Experimente auf etwa 70.000 Jahre. Das ist zwar nach heutigem Stand der Forschung (4,6 Milliarden Jahre) viel zu wenig, jedoch stellte er sich damit gegen die damalige Auffassung des Christentums, dass die Erde höchstens 6000 Jahre alt sein könne. Nach ihm wurden eine Pflanzengattung (*Bufonia*), ein Mondkrater und eine Inselgruppe (Buffon-Inseln) in der Antarktis benannt.

Descartes, René
(31.3.1596 – 11.2.1650)

Descartes ist vor allem für seine philosophischen Schriften und das Zitat „Cogito ergo sum“ berühmt, leistete aber auch wesentliche Beiträge zur Mathematik. Er gehörte zu den Begründern der analytischen Geometrie, die versucht geometrisch Probleme rechnerisch zu lösen und auch in der Schule (Vektorgeometrie) gelehrt wird. Nach ihm wurden das kartesische Koordinatensystem ↪ und das kartesische Produkt ↪ benannt. Seine Ausbildung war universell: er studierte Jura, lernte Fechten, Reiten, Tanzen und gutes Benehmen und reiste viel, um so mit Gelehrten in Kontakt zu kommen. In der Philosophie war (und ist) sein Werk „Discours de la méthode“ von großer Bedeutung, in dem er eine Methode beschreibt, um komplexe Probleme der Philosophie zu lösen. Diese Methode ähnelt sehr dem mathematischen Vorgehen. Descartes beschäftigte sich mit Physik (er formulierte unter anderem das Trägheitsgesetz) und mit der Physiologie des Menschen, den er als einen mechanischen Organismus betrachtete. Seine Ideen waren fortschrittlich (trotzdem nicht alle richtig), stießen aber auch auf Kritik, besonders von Seiten der Kirche. So sprach der Heilige Stuhl 1633 ein kirchliches Verbot von Descartes Schriften aus.

Da Vinci, Leonardo (15.4.1452 – 2.5.1519)

Da Vinci ist in erster Linie für seine Tätigkeiten als Maler berühmt. Fast jeder kennt seine Gemälde „Das Abendmahl“ und die „Mona Lisa“. Doch er war nicht nur an der Malerei interessiert, sondern auch an der Bildhauerei, Architektur, Anatomie, den Naturwissenschaften und der Literatur. Das Wissen über den Aufbau des menschlichen Körpers betrachtete er als notwendig, um anatomisch korrekte Gemälde zeichnen zu können. Dafür sezierte Da Vinci auch Leichen. Eine bekannte Zeichnung ist die des vitruvianischen Menschen, die den Menschen mit seinen Proportionen und seiner Symmetrie abbildet und auf deutschen Krankenversichertenkarten zu sehen ist. Im Bereich der Technik betätigte er sich als Mechaniker und Ingenieur, z.B. durch die Konstruktion von Zahnrädern und Getrieben. Auch heute noch werden Entwürfe von ihm realisiert (die Leonardo-da-Vinci-Brücke in Ås, 2001; die Leonardo-Brücke in Freiburg im Breisgau, 2005).

Edison, Thomas (11.2.1847 – 18.10.1931)

Thomas Edison ist der Erfinder der Glühbirne bzw. genauer gesagt der Kohlefaden-Glühlampe. Aber nicht nur die Glühbirne zählt zu seinen Erfindungen. Im Laufe seines Lebens widmete sich Edison dem Forschen, Weiterentwickeln, Erfinden, ebenso wie unternehmerischen Tätigkeiten. Er wurde in Ohio, USA geboren und musste schon mit elf Jahren arbeiten. Mit 15 Jahren erhielt er eine Anstellung als Telegraph, womit auch seine Karriere als Erfinder und Unternehmer begann. Er leistete große Beiträge zur Telegraphenbranche, indem er z.B. die Anzahl der Nachrichten, die gleichzeitig verschickt werden konnten, vergrößerte oder die Übertragungsgeschwindigkeit deutlich erhöhte. Zudem entwickelte er den Phonographen, das Kohlekörnermikrofon, mit dem das Telefonieren über größere Distanzen hinweg ermöglicht wurde, das Edisongewinde, das noch heute üblicherweise als Lampensockel verwendet wird, den elektrischen Stuhl und den Kinetographen, eine der ersten Filmkameras, die einen großen Fortschritt in der Filmindustrie ermöglichte. Die oben erwähnte Glühbirne war zwar nicht die erste Glühbirne, die entwickelt wurde, aber die erste, die für den Alltagsgebrauch geeignet war und es schaffte die Gaslampen abzulösen. Damit einher ging der Aufbau eines Versorgungsnetzes mit elektrischer Energie und die Elektrifizierung New Yorks. Das sind aber noch lange nicht alle Erfindungen und Entwicklungen. Insgesamt meldete Thomas Edison 1093 Patente an.

Einstein, Albert
(14.3.1879 – 18.4.1955)

Diesen Physiker kennt die ganze Welt, doch was genau hat ihn so bekannt gemacht? Einstein beschäftigte sich mit der Theoretischen Physik und brach mit seinen Theorien mit der bis dahin vorherrschenden Experimentalphysik, die vor allem durch Newton vertreten wurde. Seine bekanntesten Theorien sind die der speziellen und der allgemeinen Relativitätstheorie↪, in denen er sich mit Materie, Raum, Zeit und Gravitation auseinandersetzt. Er beschäftigte sich aber auch mit der Quantenphysik und legte z.B. die physikalischen Grundlagen zur Entwicklung des Lasers. 1922 erhielt er den Nobelpreis für seine Verdienste um die theoretische Physik. Obwohl viele seiner Theorien schon sehr früh belegt werden konnten, wehrten sich zeitgenössische Physiker gegen seine Ideen und wollten ihn nicht für den Nobelpreis nominieren. Trotz des Widerstands schaffte es Einstein sich durchzusetzen und revolutionierte das bis dahin bestehende physikalische Weltbild. Schon zu Schulzeiten wurde deutlich, dass er sich stark für Physik und Mathematik, weniger hingegen für Sprachen, interessierte. Das oft verbreitete Gerücht, dass Einstein schlecht in Mathematik war, beruht auf einem Irrtum seines ersten Biografen. Dieser verwechselte das schweizerische mit dem deutschen Notensystem, wo die Notenskala genau umgekehrt ist. Einstein widerstrebte das strenge Schulsystem des Deutschen Kaiserreichs und er verließ noch vor seinem Abitur das Gymnasium, legte aber die Matura in der Schweiz ab. Er äußerte sich auch gegen Militär und Krieg und trat zeit seines Lebens für Pazifismus und Völkerverständigung ein. Mit der Machtübernahme der Nationalsozialisten wandte er sich (bis zu seinem Tod) von Deutschland ab. Obwohl er sich mehrere Male öffentlich als nicht religiös bekannte, fühlte er sich der Kultur und dem Volk der Juden zugehörig. Durch seine Zugehörigkeit zum Judentum entging auch Einstein nicht dem Hass der Nationalsozialisten, die Schriften von ihm verbrannten und ihm die deutsche Staatsbürgerschaft entzogen. Diese wollte er kurz zuvor abgeben, dem Antrag wurde aber nicht stattgegeben. Während seines Lebens hatte Einstein vier verschiedene Staatsbürgerschaften: die deutsche, die österreichische, die schweizerische und die amerikanische. Ganze fünf Jahre lang (1896 – 1901) war er sogar staatenlos. Bis zu seinem Tod behielt er die schweizerische und die amerikanische Staatsbürgerschaft.

Erdös, Paul (26.3.1913 – 20.9.1996)

Erdös war ein ungarischer Mathematiker, dessen Talent sich schon früh in seiner Kindheit zeigte. So konnte er mit vier Jahren seinen Freunden und seiner Familie auf die Sekunde genau im Kopf ausrechnen, wie lange sie schon lebten. Er lebte eine Zeit in den USA und in England, blieb aber nie lange an einem Ort, sondern ging dorthin, wo er interessante Mathematik betreiben konnte. Er beschäftigte sich vor allem mit Graphen und Zahlentheorie und Kombinatorik.

Erdös arbeitete gern mit anderen Mathematikern zusammen und veröffentlichte 1500 gemeinsame Artikel. Daraus entstand auch die so genannte "Erdös-Zahl". Erdös selbst hat die Zahl 0, Menschen die direkt mit ihm zusammen gearbeitet haben, die Zahl 1, Menschen die über eine Ecke mit Erdös zusammen gearbeitet haben, die Zahl 2, usw. Das Ganze kann man auch in einem Graphen darstellen, in dem zwei Menschen, die zusammengearbeitet haben, durch eine Kante ↪ verbunden sind. Erdös hatte die Idee von einem gottgeschaffenen (obwohl er nicht an Gott glaubte) Buch, das die perfekten Beweise enthält. Daraufhin schrieben ihm zu Ehren die Mathematiker M. Aigner und G. Ziegler "Das Buch der Beweise", das besonders schöne Beweise enthält.

Euklid von Alexandria (etwa 3. Jahrhundert v.Chr.)

Euklid lebte im antiken Griechenland und trug besonders mit seinem Werk „Die Elemente" ↪ zur Mathematik bei. Über sein Leben ist sehr wenig bekannt, er hatte aber trotzdem so großen Einfluss, dass auch heute noch die Geometrie, die in der Ebene stattfindet, euklidische Geometrie genannt wird. Sie wird meistens in der Unter und Mittelstufe unterrichtet. Euklid beschäftigte sich aber auch mit Arithmetik, Physik und Musiktheorie. Besonders berühmt ist der euklidische Algorithmus ↪, mit Hilfe dessen man den ggT ↪ zweier Zahlen bestimmen kann.

Euler, Leonhard (15.4.1707 – 18.9.1783)

In der Oberstufe lernt man die Eulersche Zahl e kennen, mit deren Hilfe man Wachstumsvorgänge beschreiben kann. Sie geht zurück auf den Schweizer Mathematiker und Physiker Leonhard Euler. Auch weitere Symbole der Analysis stammen von ihm: das Summenzeichen Σ, π ↪, die imaginäre Einheit i ↪ und die Schreibweise $f(x)$ für einen Funktionsterm.

Er legte wichtige Grundbausteine in der Analysis, Differential- und Integralrechnung, aber auch in der Zahlentheorie und der Algebra ↪. Bemerkenswert ist, dass Euler versuchte die theoretischen Kenntnisse der Mathematik für die Praxis zu nutzen, wie z.B. für die Lotterien oder die Rentenberechnung. Er beschäftigte sich außerdem mit dem „Königsberger Brückenproblem“, einem Problem aus der Graphentheorie, dem „Springerproblem“, einem Problem aus der Schachmathematik, und erfand das „lateinische Quadrat“, welches eine Vorform des Sudokus ist. Euler lebte unter anderem auch in Russland und Berlin. Er hatte große Probleme mit seiner Sehkraft. 1740 erblindete sein rechtes Auge, ab 1771 war er vollständig blind. Doch dieses Schicksal hinderte ihn nicht daran sich mit Mathematik zu beschäftigen und er schuf fast die Hälfte seines Werks, nachdem er erblindete.

Fermat, Pierre de (1607 – 12.1.1665)

Fermat studierte nicht Mathematik, sondern Zivilrecht in Orléans und durchlief eine beeindruckende Karriere, die in bis ins Parlament von Toulouse führte. Er bekam eine klassische und umfangreiche Bildung. Diese reichte aber damals nicht aus, um einen hohen Posten zu erlangen, denn den musste man sich für viel Geld kaufen. Dies war Fermat nur möglich, da er sehr reich von seinem Vater erbte. Während seiner Zeit als Anwalt und Richter beschäftigte er sich viel mit der Mathematik, besonders mit Zahlentheorie, Analysis und analytischer Geometrie. Viele seiner mathematischen Überlegungen fanden in den Korrespondenzen mit anderen Wissenschaftlern statt. Besonders berühmt ist sein Streit mit Descartes über die Berechnung von Maxima, Minima und Tangenten. In der Zahlentheorie machte Fermat einige bahnbrechende Entdeckungen: Er formulierte den „Kleinen Fermatschen Satz“, der Aussagen über die Eigenschaften von Primzahlen ↪ macht und aus dem man den „Fermatschen Primzahltest“ herleiten kann und den „Großen Fermatschen Satz“ ↪. Letzterer ist einer der berühmtesten Sätze der Mathematik und konnte erst 1994 vollständig bewiesen werden.

Fibonacci (um 1170 – nach 1240)

Eigentlich Leonardo da Pisa. Der Name Fibonacci kam durch seinen Großvater zustande. Dieser hieß Bonaccio und wurde von Leonardos Vater als Patronym verwendet. Leonardo wurde daraufhin „figlio di Bonaccio“ genannt, was zu Fibonacci verschmolz. Seine mathematische

Bildung erwarb er, entgegen der Erwartungen nicht in Italien und Europa, sondern größtenteils im arabischen Raum (Algerien). Dort lernte er auch die arabischen Ziffern kennen, die wir heute noch benutzen, damals aber in Europa noch nicht weit verbreitet waren. Fibonacci war begeistert von der Mathematik der Inder und schätzte sie mehr als die Mathematik Europas. Der arabische Raum war zu dieser Zeit fortschrittlicher hinsichtlich der Wissenschaft als das mittelalterliche Europa. Fibonacci fasste seine Kenntnisse in dem Buch „Liber abacci“ zusammen. In diesem Buch taucht auch die so genannte „Fibonacci-Folge“ ↪ auf, wegen der er auch heute noch berühmt ist.

Galileo Galilei (15.02.1564–8.01.1642)

Galileo lebte in Italien und forschte in vielen unterschiedlichen Gebieten, u.a. in der Mathematik, Physik, Astronomie und Philosophie. Er war also ein Universalgelehrter. Nachdem er ein Medizinstudium abbrach, studierte er Mathematik und arbeitete unter anderem als Hochschullehrer in Pisa und Professor in Padua. Er machte viele wichtige physikalische und astronomische Entdeckungen. So erkannte er bei Experimenten, dass nicht nur die Geschwindigkeit auf ein Objekt wirkt, sondern auch die Beschleunigung. Er baute sich ein eigenes Fernrohr und beobachtete mit ihm den Himmel. Dabei entdeckte er die Monde des Jupiters, was ihm große Berühmtheit verschaffte. Zudem fand er heraus, dass auch Luft etwas wiegt. Heute ist Galilei vor allem für die Annahme (heute ist das eine Tatsache) berühmt, dass die Sonne das Zentrum des Universums ↪ ist und sich die Erde um die Sonne dreht (heliozentrisches/kopernikanisches Weltbild). Das entsprach damals nicht der kirchlichen Lehre, die in der Erde das Zentrum des Universums ↪ annahm. Seine Überlegungen dazu veröffentliche er in dem Buch „Dialog von Galileo Galilei über die zwei wichtigsten Weltsysteme, das ptolemäische und das kopernikanisch“. Die Kirche fühlte sich und ihre Lehre von der Wissenschaft und dem Weltbild Galileis in Gefahr gebracht. Es kam noch hinzu, dass sich Galilei in seinem Buch über den Papst lustig machte. Damit ging er vermutlich zu weit und es kam zum Prozess, in dem er wegen der Lehre des kopernikanischen Systems und wegen Ungehorsams angeklagt wurde. Er wurde zu lebenslanger Kerkerhaft verurteilt, das Urteil wurde jedoch nie vollzogen. Galilei stand bis zum Ende seines Lebens unter Hausarrest und ihm wurde verboten seine Lehrtätigkeit wiederaufzunehmen oder seine Forschungen zu veröffentlichen. Erst im Jahr 1992 wurde er von der katholischen Kirche rehabilitiert. Eine der wichtigsten Neuerungen, die Galilei in die Wissenschaft einbrachte, war die Methode mit der er forschte. Er führte Experimente durch, notierte seine Beobachtungen und nahm die Messungen schließlich mittels der Mathematik vor.

Galois, Évariste (25.10.1811 – 31.5.1832)

Galois starb im Alter von nur 20 Jahren, schaffte es aber bis dahin (bzw. rückwirkend nach seinem Tod) die Algebra ↪ große Schritte weiter zu bringen. Er befasste sich, grob gesagt, mit den Nullstellen von Polynomen, was zu seiner berühmten Galoistheorie führte, die noch heute an den Universitäten gelehrt wird. Er gab damit die Grundlage für die Lösung einiger klassischen Probleme der antiken Mathematik. Leider bekam Galois zu Lebzeiten nichts mehr von seinem Ruhm mit, Joseph Liouville entdeckte erst zehn Jahre nach Galois' Tod die Bedeutsamkeit dessen Werks. Galois starb während eines Duells um ein Mädchen. Die Nacht zuvor schrieb er noch einen Brief an einen Freund mit seinen wichtigsten mathematischen Erkenntnissen und der Bitte ihn in Umlauf zu bringen. Der Freund ging der Bitte nach und schickte den Brief sogar an Gauß ↪, von dem aber keine Reaktion bekannt ist. Galois war Republikaner und nahm zu Zeiten der Herrschaft des Königs LouisPhilippe de Orléans an einer Demonstration teil, weswegen er zu einigen Monaten Haft verurteilt wurde.

Gauß, Carl Friedrich (30.4.1777 – 23.2.1855)

Gauß ist wohl der bedeutendste deutsche Mathematiker und galt schon zu Lebzeiten als „Princeps Mathematicorum" (Fürst der Mathematiker). Die populärste seiner Entdeckungen ist vermutlich der „Kleine Gauß" ↪, eine Formel für die Summe der ersten n Zahlen, die er angeblich bereits im Grundschulalter fand. Damals schon nahm man seine Begabung wahr und förderte Gauß in jeder Hinsicht. Er studierte an der Universität Göttingen, wo er später auch Professor und Direktor der Sternwarte wurde. Besonders beeindruckend ist, dass Gauß in allen möglichen Gebieten der Mathematik forschte. Er fand einen Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra ↪, der Aussagen über die Anzahl der Nullstellen eines Polynoms macht. Die Nullstellen und die Koeffizienten des Polynoms sind dabei komplexe Zahlen ↪. Im Bereich der Numerik fand er Methoden, um neue Messwerte auf der Basis von alten voraussagen zu können (z.B. die Methode der kleinsten Quadrate) oder neue Methoden um den Flächeninhalt unter Kurven zu berechnen. Das führte ihn auch zu der Gaußschen Glockenkurve und der durch ihn begründeten Normalverteilung, die in der Statistik eine wichtige Rolle spielt und in der Oberstufe gelehrt wird. Weitere Entdeckungen machte er auf dem Gebiet der Geometrie, insbesondere in der nichteuklidischen ↪ Geometrie. Das ist eine Geometrie die nicht mehr nur in der Ebene stattfindet, sondern z.B. auf einer Sphäre wie die Erde es ist. Dort herrschen andere Gesetze, so gibt es beispielsweise gar keine parallelen Geraden oder zu einer Geraden mehrere parallele Geraden, die durch den selben Punkt verlaufen. Schon damals vermutete Gauß, dass die Winkelsumme eines Dreiecks auf einer Sphäre nicht 180° beträgt, konnte es aber aufgrund zu geringer Abweichungen bei seinen Messungen nicht nachweisen. Aber nicht nur im Bereich der Mathematik erzielte Gauß große Erfolge, sondern auch in der Physik und Astronomie. So schaffte er es, unter anderem mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate, die Umlaufbahn und somit die Position des verloren gegangen Zwergplaneten Ceres zu berechnen, woraufhin dieser wiederentdeckt wurde. Gauß hatte großen Einfluss auf nachfolgende Mathematikergenerationen, darunter auch seine Schüler Bernhard Riemann und Richard Dedekind. Er arbeitete nach dem Motto „Pauca sed matura" (Weniges, aber Reifes). Er veröffentlichte seine Theorien also erst, wenn er sie als vollständig etrachtete und nahm damit in Kauf, weniger zu veröffentlichen oder dass andere Mathematiker ihm mit einer Veröffentlichung zuvorkamen. Als Gauß starb, bewahrte man sein Gehirn auf und untersuchte es auf mögliche Auffälligkeiten, um seine außerordentlichen mathematischen Leistungen erklären zu können. Es ließ sich nichts feststellen, aber 2013 fand eine Forscherin heraus, dass Gauß‘ Gehirn vermutlich mit dem des Mediziners Conrad Heinrich Fuchs vertauscht worden war. Doch auch dieses Gehirn zeigt keine Auffälligkeiten.

Hilbert, David (23.1.1862 – 14.2.1943)

Hilbert wurde in Königsberg (heute das russische Kaliningrad) geboren und zählt zu den bedeutendsten deutschen Mathematikern. Sein mathematisches Interesse erbte er vermutlich eher von seiner Mutter als von seinem Vater, der seiner Karriere kritisch gegenüberstand. Nach dem Mathematikstudium und der Promotion an der angesehenen Albertus-Universität in Königsberg begab sich Hilbert auf eine Studienreise und wurde schließlich an die Universität Göttingen berufen. Dort trug er wesentlich zum Ausbau der mathematischen Forschung bei und gab Vorlesungen. Mit seinen Studenten ging er in Gastwirtschaften oder auf Spaziergänge, um sich dort mit ihnen über Mathematik auszutauschen, was ihn sehr beliebt machte. Unüblich für die damalige Zeit war die große Anzahl an Studentinnen, die bei ihm promovierten. Hilbert unterstütze begabte Frauen und wollte auch ihnen die Möglichkeit zum Studieren geben. So setzte er sich auch für die Mathematikerin Emmy Noether ↪ ein, der man keinen Lehrauftrag erteilen wollte. Im Jahr 1900 war Hilbert Präsident der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Als die Nationalsozialisten 1933 die Macht ergriffen, wurden Mathematiker, die nicht den Vorstellungen des Regimes entsprachen, gezwungen ihre Arbeit niederzulegen, was zu einem Zerfall des mathematischen Instituts der Universität Göttingen führte. Für Hilbert war das ein harter Schlag. Trotz dessen sind ihm große Fortschritte in vielen Feldern der Mathematik zu verdanken. Er forschte in der Algebra ↪ und Geometrie und war der Begründer der Algebraischen Geometrie, die diese beiden Bereiche verbindet. In der Geometrie schaffte Hilbert ein Axiomensystem, das die herkömmliche Geometrie Euklids ↪ ablöste und sie formalisierte und von der reinen Anschauung loslöste. Ihm war es ein großes Anliegen, die Mathematik zu formalisieren und ein in sich widerspruchsfreies Axiomensystem für die gesamte Mathematik zu schaffen. Es stellte sich jedoch heraus, dass dies nur in Teilen möglich ist, trotzdem beeinflussten Hilberts Bestrebungen die mathematischen Darstellungs und Vorgehensweisen enorm. Im Jahr 1900 stellte er eine Liste mit den, seiner Meinung nach, 23 wichtigsten noch ungelösten mathematischen Problemen vor. Inzwischen sind 15 von ihnen gelöst. Seine Überzeugung von der Wissenschaft ist, dass es möglich ist alles herauszufinden. Für ihn gab es keine Grenzen. Demnach lautete sein Motto: „Wir müssen wissen. Wir werden wissen.“ Ein interessantes Gedankenexperiment, das er entwickelte heißt „Hilberts Hotel“. Es soll den Unendlichkeitsbegriff, der oft der eigenen Intuition widerstrebt, veranschaulichen.

Hypatia von Alexandria (um 355 – März 415 oder März 416)

Hypatia blieb der Nachwelt vor allem aufgrund ihres grausamen Tods in Erinnerung. Um ihre Person und ihr Leben gibt es viele Mythen und sie ist Gegenstand moderner Romane, Gemälde, Filme etc. Dort wird sie oft als Sinnbild für die Verbindung von Schönheit und Weisheit, die emanzipierte Frau oder für die Kritik an der Kirche verwendet. Ihre mathematische und astronomische Ausbildung erhielt sie bei ihrem Vater, der selbst Astronom und Mathematiker war. Sie lehrte öffentlich ihre Philosophie, aber auch im auserwählten kleinen Kreis. Sie gehörte den so genannten Neuplatonikern an, einer philosophischen nichtchristlichen Strömung, die versuchte die bis zu diesem Zeitpunkt wichtigsten Philosophien zu vereinen. Ihr nichtchristlicher Glaube wurde Hypatia schließlich zum Verhängnis. Die Mehrheit der in Alexandria lebenden Bevölkerung gehörte damals dem christlichen Glauben an. Es kam immer wieder zu Konfrontationen zwischen Heiden, Juden und Christen. Als der Präfekt Orestes, selbst Christ und der von Hypatia beraten wurde, die Rechte der Juden auch verteidigte, wurde das Gerücht gestreut, Hypatia rate ihm, eine Versöhnung zwischen den konkurrierenden Gruppen nicht zuzulassen. Daraufhin versammelte sich ein wütender Mob Christen, der Hypatia in eine Kirche brachte und sie auf brutale Art und Weise ermordete. Über Hypatias Lehren ist wenig bekannt, da keine von ihren Schriften erhalten ist. Das meiste bleibt somit Spekulation, klar ist aber, dass sie eine berühmte und angesehene Persönlichkeit war und großen Einfluss hatte.

Johnson, Katherine G. (26.8.1918– heute)

Johnson trug wesentlich zum Erfolg der ersten bemannten Flüge in den Weltraum und zum Mond bei. In den USA zu einer Zeit geboren, wo es Frauen (nicht nur) in der Wissenschaft schwer hatten, setzte sie sich durch und überzeugte durch ihre mathematischen Kenntnisse. Erschwerend kam ihre afroamerikanische Abstammung hinzu, die ihr schon als Kind Hürden stellte. Damals gab es noch Rassentrennung. So musste sie z.B. auf eine Highschool gehen, die über 200km von ihrem Heimatort entfernt lag, weil die dortige Schule für Afroamerikaner nach der achten Klasse endete. Ihr Talent für Mathematik bemerkten bald ihre Lehrer. Sie wurde gefördert, übersprang mehrere Klassen und machte mit nur 18 Jahren ihren Bachelor of Science. Nachdem sie einige Jahre als Lehrerin gearbeitet hatte, begann sie ihre Karriere bei der NACA (später NASA). Anfangs wurde sie nur für die Berechnung und Darstellung verschiedener Daten oder für die Auswertung von Flugschreibern eingesetzt, doch bei ihrem Einsatz in der Abteilung für Flugforschung bemerkte man ihre Fähigkeiten und wollte nicht mehr auf sie verzichten. Johnson half maßgeblich bei mehreren Weltraummissionen mit und veröffentlichte auch erste Fachbücher zum Thema Weltraumfahrt. In ihrer Abteilung war sie die erste Frau, die als Mitautorin genannt wurde. Im Jahr 2015 wurde ihr von Barack Obama die Presidential Medal of Freedom überreicht.

Kowalewskaja Wassiljewna, Sofja (15.1.1850 – 10.2.1891)

Wie auch andere Frauen ihrer Zeit musste sich Kowalewskaja ihren Weg in die Wissenschaft erkämpfen. Ihr Interesse an der Mathematik entdeckte sie schon früh. Aus Mangel an Tapete wurde ihr Zimmer mit einer Vorlesung über Integral- und Differentialrechnung tapeziert, die sie daraufhin ausgiebig studierte. Auch gab ihr Onkel sein Wissen an die Nichte weiter. Als ihr Interesse weiter zu nahm, verbot ihr Vater ihr sich mit Mathematik zu beschäftigen. Erst ihr Nachbar, ein Physikprofessor, der ihr Talent bemerkte, ermöglichte es, dass sie Unterricht in Sankt Petersburg bekam. Kowalewskaja fasste den Entschluss in Westeuropa zu studieren, da Frauen in Russland noch nicht studieren durften. Dazu musste sie eine Scheinehe eingehen, da es ihr ohne Vater oder Ehemann nicht erlaubt war zu verreisen. Über Wien gelangte sie nach Heidelberg, wo es Frauen nicht gestattet war, sich zu immatrikulieren. Sie schaffte es aber als Gasthörerin zugelassen zu werden. Auf Anraten ihres Professors ging sie nach Berlin zu Karl Weierstraß, der sie stark unterstütze, nachdem sie ihn von ihrem Können überzeugt hatte. Sie arbeitete ganze drei mögliche Doktorarbeiten aus und konnte schließlich an der Universität Göttingen promovieren. Kowalewskaja wurde 1884 in Stockholm zur ersten Mathematikprofessorin der Welt, die selbst Vorlesungen hielt. 1889 erhielt sie eine Professur auf Lebenszeit, aber schon zwei Jahre später starb sie an einer Lungenentzündung mit nur 41 Jahren.

Mirzakhani, Maryam (3.5.1977 – 14.7.2017)

Mirzakhani war eine iranische Mathematikerin der Gegenwart. Nach dem Mathematikstudium in Teheran promovierte sie an der berühmten Harvard University und wurde schließlich Professorin an der Stanford University. Sie beschäftigte sich z.B. mit der hyperbolischen Geometrie. Diese findet nicht in der Ebene (also dem $\mathbb{R}^2$), sondern in einer Teilmenge der komplexen Zahlen ↪ statt (der oberen Halbebene). In dieser Geometrie, gibt es zwar auch Längen und Abstände, sie sind aber anders definiert und werden anders berechnet wie in der euklidischen ↪ Geometrie, die wir kennen. Die Winkelsumme im Dreieck ist beispielsweise immer kleiner als 180° und zu einer Geraden gibt es unendlich viele parallele Geraden, die durch denselben Punkt gehen. Das ist verblüffend, aber Mirzakhani war auf diesem Gebiet eine Spezialistin. Auch beschäftigte sie sich mit Billardtischen. Aber was haben die mit Mathematik zu tun? Sie untersucht, welche Bahnen die Kugeln auf dem Tisch nehmen können.

Es geht dabei nicht mehr nur um rechteckige Tische, sondern um Tische ganz verschiedener Formen. Die Fragestellung verbindet die Geometrie und dynamische Systeme. Mirzakhani war die erste und bislang einzige Frau, die die Fields-Medaille gewann.

Noether, Emmy (23.3.1882 – 14.4.1935)

Noether legte nicht nur in der Mathematik und der Physik Meilensteine, sondern auch für die Rechte der Frauen. Sie war die zweite deutsche Frau, die in Deutschland in Mathematik promovierte und nach Beginn der Weimarer Republik die erste Frau in Deutschland, die in Mathematik habilitierte. Dabei wurde sie wesentlich von David Hilbert↪ und Felix Klein unterstützt. Politisch gesehen war sie Pazifistin und Mitglied der SPD. Nach der Machtübernahme der NSDAP wurde Noether ihre Lehrerlaubnis entzogen und sie emigrierte in die USA, wo sie eine Gastprofessur erhielt. In der Mathematik beschäftigte sie sich vor allem mit der Algebra↪. Auf diesem Gebiet arbeitet sie viel mit Emil Artin zusammen und es wurden sogar mathematische Strukturen nach ihnen benannt: Noethersche Ringe und Artinsche Ringe. Ringe sind Zahlenmengen mit Verknüpfungen (wie z.B. + und ·), die bestimmte Strukturen aufweisen und bestimmte Eigenschaften haben. So sind z.B. die ganzen und die rationalen Zahlen ein Ring, aber nicht die natürlichen Zahlen. Noethersche Ringe haben noch mehr Eigenschaften, die nicht alle Ringe aufweisen. Mit ihren Erkenntnissen beeinflusste Noether die moderne Algebra↪ maßgeblich.

Pythagoras von Samos (um 570 v. Chr. – nach 510 v. Chr.)

Den Satz des Pythagoras↪ kennt so ziemlich jeder: $a^2+b^2=c^2$. Doch inzwischen ist klar, dass dieser Satz gar nicht von Pythagoras stammt, sondern schon den Babyloniern bekannt war. Umstritten ist allerdings, ob diese schon einen Beweis für ihn hatten oder der Beweis auf Pythagoras zurückgeführt werden kann. Doch nicht nur das ist umstritten: die Quellenlage um Pythagoras ist so kontrovers, dass es zu zwei gegensätzlichen Forschungsmeinungen gekommen ist. Die einen sind überzeugt, dass Pythagoras ein Wissenschaftler war und Beiträge zur Mathematik, Musik und Astronomie geleistet hat, wobei er empirisch vorging. Er soll z.B. harmonische Intervalle durch Zahlenverhältnisse dargestellt haben. Die anderen sehen in ihm einen religiösen Führer, der mit seiner von ihm gegründeten Schule, den Pythagoreern, eine philosophischreligiöse Lehre verbreitete, die sich mit Mystik beschäftigte und nicht wissenschaftlich begründet war. Seine Schüler sollen ihn als übermenschliches Wesen verehrt haben. In Einklang lassen sich diese beiden Meinungen wohl nicht mehr bringen, in einigen wenigen Punkten sind sich aber alle einig: Pythagoras wurde auf der griechischen Insel Samos geboren, zog im Laufe seines Lebens nach Italien wo er eine Schule gründete, die noch lange Zeit Einfluss haben sollte. Spekulativ ist, ob er die Begriffe „Philosophie“ und „Philosoph“ erfunden hat.

Ries, Adam (1492 oder 1493 – 30.3. oder 2.4.1559)

Auf ihn geht der berühmte Spruch „Das macht nach Adam Riese…“ zurück. In Wirklichkeit hieß er aber Ries und war deutscher Rechenmeister. Die Forschung konnte nicht herausfinden, ob er ein Studium zum Rechenmeister absolvierte, er war aber Leiter einer Rechenschule in Erfurt und verfasste mehrere Rechenbücher. Unter anderem die beiden Bücher „Rechnung auff der linihen“ (1518) und „Rechenung auff der linihen und federn...“ (1522). Das erste richtete sich an Kinder und erklärt das Rechnen auf den Linien eines Rechenbretts. Letzteres beschreibt zusätzlich das Ziffernrechnen mit arabischen Zahlen. Aufgrund der großen Verbreitung des Buchs trug Ries wesentlich dazu bei, dass sich die arabischen Ziffern gegenüber der römischen Zahlendarstellung in Deutschland durchsetzen. Außergewöhnlich war auch, dass er seine Bücher in deutscher und nicht lateinischer Sprache verfasste, was zur Vereinheitlichung des Deutschen führte. Laut dem Adam-Ries-Bund hat Ries bis heute mehr als 20.000 direkte Nachkommen.

Schickard, Wilhelm (22.04.1592–23.10.1635)

Schickard ging in die Klosterschule in Bebenhausen und studierte Theologie an der Universität Tübingen, wo er auch später als Professor für Hebräisch und Astronomie lehrte. Er brachte viele Fortschritte in der Astronomie. So begründete er eine Theorie der Mondbahn mittels der es möglich war die Mondposition zu einem beliebigen Zeitpunkt grafisch zu bestimmen. Er erfand das erste Handplanetarium, um das heliozentrische Weltbild darzustellen. Schickard war aber nicht nur theoretisch, sondern auch praktisch sehr begabt. 1623 baute er die erste Rechenmaschine, mit der man Zahlen im sechsstelligen Bereich addieren und subtrahieren konnte. Multiplikation und Division waren mittels Rechenstäbchen ebenfalls möglich. Eine rekonstruierte Rechenmaschine kann im Tübinger Stadtmuseum bewundert werden.

Sokrates
(469 v. Chr. – 399 v. Chr.)

Mit Sokrates Lehre wird der Satz „Ich weiß, dass ich nichts weiß“ verbunden, mit dem deutlich wird, dass Sokrates beim Erkenntnisgewinn vielen anderen ein Stück voraus war. Er lebte im antiken Griechenland und verkündete dort seine Lehren auf dem Marktplatz von Athen. Obwohl er schon zu Lebzeiten berühmt war, ließ er sich nicht für seine Lehrtätigkeit bezahlen. Seine Berühmtheit hält bis heute an und ihm wird eine große Wirkung in der Philosophiegeschichte zugesprochen. So bezeichnet man z.B. auch die griechischen Denker vor ihm als Vorsokratiker. Seine Lehre wurde hauptsächlich durch Schriften von seinen Schülern überliefert, da von Sokrates selbst keine schriftlichen Werke existieren. Als Hauptquelle gilt hier sein Schüler Platon. Seine Lehre konzentrierte sich auf die menschlichen Belange. Er stelle Fragen nach dem praktischen Leben, wie die Polis und Rechtsordnung zu gestalten sei, untersuchte Sprache und Rhetorik, sowie die Bildung. Auch beschäftigte er sich mit der Bestimmung des Guten, der Frage nach Gerechtigkeit und wie man zu Selbsterkenntnis gelangen kann. Sein Philosophieren sollte dabei nicht nur theoretisch stattfinden, sondern auch in der Lebenspraxis umgesetzt werden. Die Art, wie er all diese Fragen beantworten und Dinge untersuchen wollte, unterschied sich wesentlich von der seiner Zeitgenossen. Er praktizierte die so genannte „Maieutik“. Sie beschreibt den Erkenntnisgewinn durch den Dialog. Um einen Sachverhalt zu verstehen, wurde also ein Gespräch geführt, das hauptsächlich aus Frage und Antwort bestand. Dabei sollte keiner der beiden Gesprächspartner versuchen zu belehren. Sokrates wollte dabei den Sachverhalt nicht nur oberflächlich verstehen, sondern das Wesen der Sache herausfinden. Trotz seiner Popularität hatte er viele Feinde, die ihn wegen Gottlosigkeit und verderblichen Einfluss auf die Jugend anklagten. Nach einem Gerichtsverfahren wurde Sokrates schließlich zum Tode verurteilt. Obwohl er das Urteil als Ungerechtigkeit empfand, akzeptierte er es aus Respekt vor den Gesetzen und zur Einhaltung seines Grundsatzes: „Unrecht tun ist schlimmer als Unrecht leiden“.

Voltaire bzw. François-Marie Arouet (21.11.1694 – 30.5.1778)

Entgegen dem Willen seines Vaters, der in ihm einen Juristen sah, beschäftigte Voltaire sich schon früh mit Literatur und anfangs vor allem mit Lyrik. Sein Talent wurde schnell entdeckt und er erhielt Eintritt in entsprechende Kreise. Voltaire erlangte durch seine Schriften schon zu Lebzeiten und noch weit darüber hinaus Ruhm und Anerkennung. Er verfasste philosophische Erzählungen, Dramen, aber auch Texte zur Geschichtsschreibung. Letztere waren kulturhistorisch geprägt, womit Voltaire eine völlig neue Art der Geschichtsschreibungen prägte. Seine philosophischen Erzählungen waren durch aufklärerische Ideen gekennzeichnet, mit denen Voltaire vor allem durch seinen Aufenthalt in England in Kontakt kam. Dort begann er sich auch für die Lehren von Isaac Newton zu interessieren und verbreitete diese dann auch in Frankreich. Voltaire gilt als Wegbereiter der Aufklärung in Frankreich, man nennt das 18. Jahrhundert dort sogar „le siècle de Voltaire". Seine Schriften waren jedoch keineswegs immer ernsthaft, sondern oft von Ironie, Satire und Parodie durchtränkt, die er dafür nutzte Kritik zu üben. Ein immer wieder kehrendes Thema war die Kritik an der Kirche. Zwar bezeichnete Voltaire sich selbst durchaus als gläubig, kritisierte aber die Verflechtung der Kirche mit der weltlichen Macht und war davon überzeugt, dass die kirchlichen Lehren im Gegensatz zu den Idealen der Aufklärung stehen. Seine Kritik an Kirche, den bestehenden Verhältnissen und auch an bestimmten Personen, brachten ihm natürlich viele Gegner. Voltaire wurde des Öfteren aus Paris verwiesen bzw. musste Frankreich ganz verlassen und wurde sogar in der Bastille inhaftiert.

GANITA

2. Teil
Begriffe

Algebra

Die *Algebra* ist wie die Analysis oder die Wahrscheinlichkeitstheorie ↪ ein Teilgebiet der Mathematik. Über die Jahrhunderte hinweg hat sie sich in viele weitere Teilgebiete aufgespalten und es gibt inzwischen so viele Forschungsgebiete, dass man nicht mehr von DER *Algebra* sprechen kann. Zu Beginn beschäftigte man sich aber vor allem mit dem Lösen von Gleichungen mit einer Unbekannten, die durch einen Buchstaben repräsentiert wurde. Schon die Babylonier ↪ und Ägypter konnten 2000 v.Chr. Gleichungen und Gleichungssysteme lösen. Ihnen ging es aber meistens nur um die praktische Lösung eines geometrischen Problems und somit nur um eine Näherung an die Lösung; den exakten Wert wollten sie nicht wissen. Für die Griechen spielte die genaue Lösung eine wichtige Rolle. Einen wichtigen Beitrag leistete hier Diophantos von Alexandria um 250 n.Chr. Lange Zeit (bis ins 18. Jhdt.) war man vor allem an Lösungen von so genannten Polynomialgleichungen
(z.B. $3x^5 + 2x^2 + 3 = 0$) interessiert. Ein wichtiger Satz war hier der „Fundamentalsatz der *Algebra*", den Gauß ↪ beweisen konnte. Einen Umbruch gab es, als Galois ↪ herausfand, dass es für Gleichungen fünften oder höheren Grades im Allgemeinen keine Formel gibt (wie z.B. die Mitternachtsformel bei quadratischen Gleichungen). Hier begann man auch grundlegende mathematische Strukturen zu untersuchen. So betrachtet man die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ mit der Addition als eine Gruppe, die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ mit der Addition und Multiplikation als Körper, usw. Je nachdem, was eine Zahlenmenge (wie $\mathbb{Z}$) für Eigenschaften hat, wenn man eine Verknüpfung (wie die Addition) auf ihr definiert, zählt sie zu den Gruppen, Ringen oder Körpern. Im 19. und 20. Jhdt. waren z.B. David Hilbert ↪ und Emmy Noether ↪ fundamental für das Fortschreiten der *Algebra*. In der Oberstufe kommt man mit der Linearen *Algebra* in Berührung, wenn man die Vektoren kennenlernt. Hier sieht man auch die Verknüpfung zur Geometrie. Ein weiteres interessantes Feld ist die algebraische Geometrie, wo man Nullstellen algebraischer Gleichungen betrachtet, die oft tolle geometrische Objekte repräsentieren.

Algorithmus

Ein *Algorithmus* beschreibt eine Handlungsanweisung, bei der man bestimmte Schritt so lange wiederholen muss, bis man zu einem Ergebnis kommt. Man kann ihn sich wie eine Wegbeschreibung oder ein Kochrezept vorstellen. Wie viele Schritte man machen muss, hängt vom Ausgangswert ab. Ein sehr berühmter *Algorithmus* ist der euklidische ↪ *Algorithmus*, der in Euklids Elementen ↪ beschrieben wird und mit dem man den größten gemeinsamen Teiler↪ zweier Zahlen bestimmen kann. Auch kann das berühmte Knobelspiel „Die Türme von Hanoi“ mit Hilfe eines *Algorithmus* gelöst werden. Dank *Algorithmen* können viele numerische Probleme mit Computern gelöst werden. Dabei wird ein *Algorithmus* programmiert, der dann vom Computer wesentlich schneller als von einem Menschen ausgerechnet werden kann.

Babylonier

Die *Babylonier* lebten in der Stadt Babylon und deren Umgebung. Babylon war eine Stadt im heutigen Irak und kulturelles Zentrum des Gebiets Babylonien. Dieses erstreckte sich über einen großen Teil des Zweistromlandes, durch das die beiden Flüsse Euphrat und Tigris fließen. Das babylonische Reich entstand etwa 1894 v.Chr. und endete etwa 100 n.Chr. In dieser Zeitspanne unterscheidet man zwischen dem altbabylonischen und dem neubabylonischen Reich. Es gab verschiedene Dynastien, in denen verschiedene Völker und Stämme herrschten, nachdem sie Babylon erfolgreich erobert hatten. Babylonien entwickelte sich zu einer großen Macht und wird noch heute als sehr fortschrittlich für die damalige Zeit angesehen. Das liegt unter anderem an seinem Rechtssystem, das die Rechte aller Klassen umfasste, und seinen großen Bauten, z.B. befanden sich die hängenden Gärten der Semiramis (eines der sieben Weltwunder der Antike) in Babylon. Auch waren die *Babylonier* in der Wissenschaft weit fortgeschritten, vor allem im Vergleich zum damaligen Europa. So errechneten die babylonischen Astronomen schon im 5. Jhdt. v. Chr. das Sonnenjahr. Auch in der Mathematik waren sie den Europäern um einiges voraus. Sie hielten ihre mathematischen Erkenntnisse auf Tontafeln fest, weswegen heute noch viele ihrer Kenntnisse erhalten sind. Ihre Zählweise beruhte auf einem eigenen Stellenwertsystem, das die Zahl 60 zur Basis hatte und nicht wie in unserem Dezimalsystem↪ die Zahl 10. Den *Babyloniern* waren Brüche und sogar irrationale Zahlen wie $\sqrt{2}$ bekannt. Auch kannten sie den Satz des Pythagoras↪ und die pythagoreischen Tripel↪ schon lange vor Pythagoras↪. Sie konnten quadratische und kubische Gleichungen lösen und kannten die Zahl 0, wenn auch nicht als Zahl, sondern als Leerzeichen.

Binärdarstellung

Das *Binärsystem* ist ein Zahlensystem, so wie unser geläufiges Dezimalsystem, mit der Basis 2 und besteht folglich nur aus zwei Ziffern, nämlich 0 und 1. Man schreibt eine Zahl nur mit Hilfe ihrer 2er-Potenzen. Dabei liest man von rechts nach links, wobei man mit der niedrigsten 2er-

Potenz beginnt, nämlich 2^0, dann kommt 2^1, usw. 0 und 1 geben dann an, wie oft ich die jeweilige 2er-Potenz brauche.

Bsp.: Die Zahl 14 setzt sich aus 2^3, 2^2 und 2^1 zusammen, denn $2^3 + 2^2 + 2^1 = 14$.
Somit brauche ich 2^3, 2^2 und 2^1 jeweils einmal, 2^0 keinmal und schreibe 1110 ($1{\cdot}2^3 + 1{\cdot}2^2 + 1{\cdot}2^1 + 0{\cdot}2^0 = 14$).

Das *Binärsystem* ist von großer Bedeutung in der Technik. Z.B. basieren unsere Computer auf ihm.

Blauwal

Blauwale leben in allen Ozeanen und sind die größten Säugetiere der Welt. Tatsächlich sind sie in jeder Hinsicht gigantisch. Sie können eine Länge von bis zu 33m (das entspricht etwa drei Einfamilienhäusern) und ein Gewicht von bis zu 200t erreichen. Damit ist der *Blauwal* das schwerste Tier, das es je gab. Schon allein sein Herz wiegt zwischen 600kg und 1t. Die Aorta hat einen Durchmesser von 20cm (ein Kind könnte ohne Probleme durch sie hindurch schwimmen) und er besitzt zwischen 300 und 400 Barten am Oberkiefer, die zwischen 50 und 100cm lang werden können. Die ältesten *Blauwale*, die man bis heute gefunden hat, waren 100 Jahre alt, wobei man aber davon ausgeht, dass sie ein weit höheres Alter erreichen können. *Blauwale* ernähren sich von Plankton, das durch die Barten gefiltert wird. In den Wintermonaten leben sie von den Reserven, die sie sich in den Sommermonaten angefressen haben. In diesen nehmen sie pro Tag etwa 40 Millionen Kleinkrebse zu sich, das sind 3,5t. Sie erreichen eine Maximalgeschwindigkeit von bis zu 48km/h und können bis zu 500m tief tauchen. Ihre Tauchgänge dauern im Durchschnitt 3–10min, wobei sie auch bis zu 20min unter Wasser bleiben können. Beim Ausatmen entsteht ein Blas, der bis zu 9m hoch werden kann. Die Vorfahren der *Blauwale* lebten überraschenderweise nicht nur im Wasser, sondern auch auf dem Land. Ab Mitte des 19. Jhdts. begann man mit der Jagd auf *Blauwale* aufgrund ihres Fleisches und Fettes. Außerdem benutzte man ihre Knochen und Barten als Werkstoffe. Dies führte dazu, dass ihre Population von 220.000 Tieren (1920) auf 1.000–3.000 Tiere (1960) schrumpfte. Daraufhin traten 1972 internationale Schutzbestimmungen in Kraft, die bis heute gelten. Inzwischen wird die Population auf 10.000–20.000 Tiere geschätzt.

Buffonsches Nadelproblem

Man nehme ein Blatt Papier und zeichne darauf mehrere zueinander parallele Linien mit Abstand d. Nun lässt man eine gewisse Anzahl n an Nadeln (oder Streichhölzern) der Länge l darauf fallen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Nadel eine der parallelen Linien schneidet? Danach fragt das *Buffonsche Nadelproblem*, das vom Mathematiker Buffon ↪ formuliert wurde. Lösen konnte man es mit Hilfe der Integralrechnung. Mit ihr fand man heraus, dass die Wahrscheinlichkeit

im Fall $d = l$ (wenn der Abstand zwischen den Linien gleich der Länge der Nadeln ist)

$$p = \frac{2}{\pi} \text{ betragt,}$$

im Fall $d > l$ (wenn der Abstand zwischen den Linien größer als die Länge der Nadeln ist)

$$p = \frac{2l}{\pi d} \text{ betragt.}$$

Anhand dieser Formel und dem Gesetz der großen Zahlen ↪ weiß man nun, dass im 1. Fall

$$\frac{x}{n} \to p \Rightarrow \frac{x}{n} \to \frac{2}{\pi} \Rightarrow \frac{n}{x} \to \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{2 \cdot n}{x} \to \pi$$

wenn x = Anzahl der Nadeln ist, die die Linien geschnitten haben. (Der 2. Fall funktioniert analog.) Man hat also eine Näherung für die Kreiszahl π ↪ gefunden. Möchte man mit seinen Freunden wetten, ob eine Nadel eine Linie trifft oder nicht und möchte man eine faire Wette eingehen, dann sollte das Verhältnis (im Fall $d \geq l$) zwischen Länge der Nadeln und Abstand der Linien $\frac{l}{d} = \frac{\pi}{4}$ betragen, denn genau dann hat man eine Wahrscheinlichkeit von p = 50% = 0.5. Rechnerisch sieht das dann so aus:

$$p = \frac{2l}{\pi d} = \frac{2\pi}{\pi 4} = \frac{1}{2}.$$

Möchte man mit größerer Wahrscheinlichkeit gewinnen, dann sollte ein größeres Verhältnis gewählt werden.

Echt kleiner o. größer/ kleiner o. größer gleich

Echt kleiner bedeutet, dass eine Zahl immer kleiner ist als eine andere. Der Unterschied zwischen beiden Zahlen kann dabei minimal werden, aber sie sind nie gleich. Man schreibt dann $x < y$ und sagt x ist *echt kleiner* y.

Bsp.: 3 < 4 (3 ist *echt kleiner* 4)
3.999999999 < 4

Echt größer bedeutet, dass eine Zahl immer größer ist als eine andere. Der Unterschied zwischen beiden Zahlen kann dabei minimal werden, aber sie sind nie gleich. Man schreibt dann $x > y$ und sagt x ist *echt größer* y.

Bsp.: 4 > 3 (4 ist *echt größer* 3)
4.0000000001 > 3

Kleiner gleich bedeutet, dass eine Zahl kleiner ist als eine andere, oder beide Zahlen auch gleich sein dürfen. Man schreibt dann $x \leq y$ und sagt x ist *kleiner gleich* y. Jede Zahl die echt kleiner einer anderen ist, ist auch *kleiner gleich* dieser Zahl, aber nicht jede Zahl, die *kleiner gleich* einer anderen Zahl ist, ist auch echt kleiner dieser Zahl.

Bsp.: 3 ≤ 4 (3 ist *kleiner gleich* 4) und 3 < 4
4 ≤ 4, aber 4 ist nicht echt kleiner 4

Größer gleich bedeutet, dass eine Zahl größer ist als eine andere, oder beide Zahlen auch gleich sein dürfen. Man schreibt dann $x \geq y$ und sagt x ist *größer gleich* y. Jede Zahl die echt größer einer anderen ist, ist auch *größer gleich* dieser Zahl, aber nicht jede Zahl, die *größer gleich* einer anderen Zahl ist, ist auch echt größer dieser Zahl.

Bsp.: 4 ≥ 3 (4 ist *größer gleich* 3) und 4 > 3
4 ≥ 4, aber 4 ist nicht echt größer 4

Ecken

In der Graphentheorie gehört zu einem Graph immer eine Menge von *Ecken* bzw. Knoten und Kanten ↪. Dabei ist eine *Ecke* genau das, was man auch intuitiv *Ecke* nennen würde. So hat ein Quadrat z.B. vier und ein Würfel (Hexaeder) acht *Ecken*. Meistens zeichnet man die *Ecken* als kleine Kreise oder Punkte.

Euklids Elemente

Das Buch kann als eine Sammlung des damaligen Wissens über die Mathematik (insb. die Geometrie, Arithmetik und die Anfänge der Zahlentheorie) gesehen werden. Euklid ↪ zeigt darin grundlegende Dinge der euklidischen Geometrie, wie z.B., dass die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt. Eines der wichtigsten Axiome des Buches ist das Parallelenaxiom. Es besagt, dass es zu jeder Gerade und zu jedem Punkt (der nicht auf der Geraden liegt) genau eine Gerade gibt, die zur ursprünglichen Geraden parallel ist und durch den Punkt verläuft. Lange hatte man geglaubt, dass sich das Parallelenaxiom aus den anderen Axiomen der euklidischen ↪ Geometrie herleiten lässt. Im 19. Jhdt. fand man dann heraus, dass es andere Geometrien gibt, die alle euklidischen ↪ Axiome erfüllen, aber in denen das Parallelenaxiom nicht gilt. Somit war klar, dass das Parallelenaxiom unabhängig von den anderen euklidischen ↪ Axiomen und kennzeichnend für die euklidische ↪ Geometrie ist. Das Buch hatte auch wegen seiner strengen Beweisführung große Bedeutung und war bis ins 20. Jahrhundert hinein Gegenstand des Geometrieunterrichts.

Fakultät

Die *Fakultät* ist eine Funktion, die nur für natürliche Zahlen definiert ist. Sie ordnet dabei einer natürlichen Zahl das Produkt dieser Zahl mit allen kleineren natürlichen Zahlen bis zur eins zu. Man kann die *Fakultät* wie eine Rechenoperation betrachten bei der man eine natürliche Zahl mit allen natürlichen Zahlen, die kleiner als sie sind, multipliziert. Man schreibt dann ein Ausrufezeichen hinter die Zahl.

Bsp.: $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Eine Besonderheit ist 0!. Diesen Wert hat man auf 1 festgelegt. Die *Fakultät* wird beispielsweise in der Kombinatorik und in der Wahrscheinlichkeitsrechnung ↪ gebraucht. Wenn man z.B. wissen möchte, wie viele verschiedene Möglichkeiten es gibt, dass sich drei (vier, fünf,…) Personen auf drei Stühle setzen, dann rechnet man 3! (4!, 5!,…).

Fibonacci-Folge

Die *Fibonacci-Folge* entsteht durch Addieren zwei benachbarter Folgeglieder, wobei die ersten beiden Glieder 1 und 1 gegeben sind. Damit erhält man

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

Sie wurde nach Fibonacci ↪ benannt, der sie mit Hilfe einer Kaninchenpopulation beschrieb. Die *Fibonacci-Folge* war allerdings schon in der Antike bekannt. Das früheste Zeugnis geht zurück auf das Jahr 450 v.Chr. in Indien. Dort nannte man sie maatraameru (sanskrit „Berg der Kadenz“). Sie hat einige verblüffende Eigenschaften. Teilt man z.B. zwei aufeinanderfolgende Folgenglieder, so nähert man sich, je größer die Folgenglieder werden, dem Goldenen Schnitt ↪ an. Außerdem sind zwei aufeinanderfolgende Folgenglieder immer teilerfremd (d.h. ihr ggT ↪ ist 1) und jede dritte Fibonacci ↪ -Zahl ist durch 2 teilbar, jede vierte durch 3, jede fünfte durch 5, … So gibt es noch weitere ähnliche Teilbarkeitsregeln. Man kann den Quotienten ↪ zweier benachbarter Folgenglieder in Form eines Kettenbruchs darstellen:

$$\frac{1}{1} = 1, \quad \frac{2}{1} = 1 + \frac{1}{1}, \quad \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{1+1}, \ldots$$

Auch konnte man zeigen, dass sich jede natürliche Zahl als Summe von endlich vielen verschiedenen Fibonacci ↪ -Zahlen darstellen lässt:

Bsp.: $4 = 1 + 3$; $6 = 5 + 1$; $9 = 5 + 3 + 1$; $16 = 8 + 5 + 3$, …

Da es irgendwann sehr mühsam ist die Folgenglieder immer wieder aufzusummieren, hat man eine Formel gefunden, mit der man das *n*-te Folgenglied ausrechnen kann. Besonders beeindruckend ist, dass die *Fibonacci-Folge* sehr häufig in der Natur vorkommt. So ist die Anzahl der Blütenblätter einer Pflanze (fast) immer eine Fibonacci ↪ -Zahl. Die Sonnenblume hat z.B. 89 Blütenblätter. Auch in ihrer Blüte kommen sie vor. Dort ordnen sich die Sonnenblumenkerne spiralförmig an und die Anzahl der Spiralen kann durch aufeinanderfolgende Fibonacci ↪ -Zahlen beschrieben werden. Oft gibt es 55 rechtsdrehende und 34 linksdrehende Spiralen.

Ganita

Das Wort *Ganita* kommt aus dem Sanskrit und kann folgende Bedeutungen haben:

1. gezählt, zusammengerechnet, berechnet
2. geschätzt
3. das Rechnen, Berechnen, Rechenkunst, Mathematik
4. Summe

Die Sprache Sanskrit wird in Indien benutzt. Man verwendet dort aber nicht die römische Schrift, sondern Devanagari. Dann wird *Ganita* so geschrieben: गनीत. Wir haben uns dazu entschieden das Spiel so zu nennen, da die indische Mathematik großen Einfluss auf die europäische Mathematik hatte. So geht die Zahl 0 und das heute in Europa gebräuchliche Dezimalsystem auf die indische Mathematik zurück.

Geburtstagsparadoxon

Das *Geburtstagsparadoxon* gibt Antwort auf die Frage, wie wahrscheinlich es ist, dass innerhalb einer Gruppe von 23 Menschen mindestens zwei beliebige Personen am selben (aber beliebigen) Tag Geburtstag haben. Man spricht von einem Paradoxon, weil die meisten Menschen die Wahrscheinlichkeit intuitiv viel niedriger schätzen, als sie in Wirklichkeit ist. So wird die Wahrscheinlichkeit von den meisten auf zwischen 1% und 5% geschätzt, wobei sie tatsächlich 50,73% beträgt. Bei einer Gruppe von 50 Menschen, beträgt die Wahrscheinlichkeit sogar schon über 90%. Wenn man also in einen Raum mit 50 Leuten kommt, dann ist es sehr wahrscheinlich, dass sich dort zwei Personen befinden, die am selben Tag Geburtstag haben. Die hohe Wahrscheinlichkeit kommt daher, dass es, da der Tag und die Personen beliebig sind, sehr viele Möglichkeiten an gemeinsamen Geburtstagen gibt. Es kommt ja jeder der 365 Tage im Jahr in Frage und auch jede der 50 Personen. Die Wahrscheinlichkeit aber, dass eine unter 50 Personen, genau am selben Tag wie man selbst Geburtstag hat, ist wesentlich geringer (12,82%).

Der Goldene Schnitt

Der *Goldene Schnitt* beschreibt ein Verhältnis, in dem eine Strecke geteilt wird. Teilt man eine Strecke, dann erhält man zwei Abschnitte. Wir nennen deren Länge a und b, wobei a die Länge des größeren und b die Länge des kleineren Abschnitts ist. Gilt nun folgendes Verhältnis

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$

dann sagt man, dass sich die beiden Abschnitte im *Goldenen Schnitt* teilen bzw. das Verhältnis der beiden Abschnitte der *Goldene Schnitt* ist. Der Quotient von a und b bzw. von $a+b$ und a hat immer denselben Wert und wird die Goldene Zahl genannt. Sie ist eine irrationale Zahl ↪ und wird oft als irrationalste aller Zahlen bezeichnet, da sie sehr schlecht durch rationale Zahlen approximiert werden kann. Um eine Strecke im *Goldenen Schnitt* zu teilen gibt es verschiedene Verfahren (die innere und äußere Teilung), unter denen eines auf Euklid ↪ zurückgeht. Der *Goldene Schnitt* findet sich in verschiedenen geometrischen Objekten, wie z.B. im Fünfeck und im Pentagramm, wieder. Im Fünfeck teilen sich die Diagonalen und im Pentagramm alle Kanten ↪ im *Goldenen Schnitt*. Ausgehend von der Definition, kann man auch goldene Rechtecke, Dreiecke, Winkel und Spiralen konstruieren. Der Goldene Winkel hat den ungefähren Wert von 137,5°. Das liegt daran, dass, wenn man einen 360°Winkel in zwei Winkel aufteilen will, die im Goldenen Verhältnis zueinanderstehen sollen, man die Werte 222,5° und 137,5° erhält. Die Goldene Zahl kann auf verschiedene Weise berechnet werden: algebraisch ↪, indem man die Nullstellen des Polynoms $x^2 - x - 1$ berechnet, oder geometrisch. Man erhält:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}6180339887$$

Zudem kann man den Wert durch einen Kettenbruch approximieren. Wie schon bei der Fibonacci-Folge ↪ erklärt wurde, nähert sich der Quotient zweier benachbarter Folgenglieder der Goldenen Zahl an, je größer die Zahlen werden. Außerdem kann man den Quotienten zweier benachbarter Folgenglieder in einem Kettenbruch darstellen. Damit erhält man den Kettenbruch, der die Goldene Zahl approximiert:

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}$$

Der *Goldenen Schnitt* ist schon lange bekannt. Eine Beschreibung findet sich bereits in Euklids Elementen ↪. Er spielt auch in der Kunst und Architektur eine Rolle. Es wird oft behauptet, dass Dinge, die im Goldenen Verhältnis zueinanderstehen als schöner und ästhetischer empfunden werden und deswegen der Goldene Schnitt z.B. bei der Konstruktion des Nôtre Dame in Paris verwendet wurde. Diese Ansicht ist allerdings umstritten und es gibt keine Belege dafür. Wo der *Goldene Schnitt* aber nachweislich eine große Rolle spielt, ist in der Natur. Die Blätter von Pflanzen ordnen sich nach bestimmten Gesetzmäßigkeiten entlang der Sprossachse an. Viele Pflanzen haben Blätter, die sich spiralförmig anordnen und der Winkel, um den gedreht werden muss, um von einem Blatt zum nächsten zu gelangen, ist der Goldene. Diese Anordnung ermöglicht der Pflanze eine größtmögliche Lichtausbeute, da nie ein Blatt komplett durch ein anderes überdeckt wird. Wäre ein Winkel von 90° zwischen den Blättern, dann würde das fünfte Blatt das erste überdecken.

Großer Fermatscher Satz

Kein Satz hat in der Geschichte der Mathematik wohl so vielen Menschen Kopfzerbrechen bereitet wie der *große Fermatsche Satz*. Dementsprechend berühmt ist er auch und wurde z.B. in einer Folge von Raumschiff Enterprise und bei den Simpsons erwähnt und es wurde sogar ein Buch nach ihm benannt („Fermats letzter Satz“ von Simon Singh). Nach der Formulierung des Satzes von Pierre de Fermat ↪ zwischen 1637 und 1643 versuchten unzählige Mathematiker vergeblich den Satz, der damals noch eine Vermutung war, zu beweisen. Fermat ↪ selbst hatte die Vermutung in einem mathematischen Werk, das er damals studierte, als Randbemerkung aufgeschrieben und hinzugefügt, dass er einen großartigen Beweis dafür gefunden habe, der Platz auf der Seite aber nicht ausreiche, um ihn nieder zu schreiben. Laut dem Satz gibt es keine ganzzahligen Lösungen a, b, c für folgende Gleichung:

$$a^n + b^n = c^n, \quad n > 2$$

Fermats ↪ Sohn veröffentlichte später das Werk inklusive Notizen und die Suche nach dem großartigen Beweis konnte beginnen. Nachdem immer wieder Spezialfälle des Satzes bewiesen wurden (z.B. für $n = 3$ oder $n = 4$) fand Andrew Wiles 1994, also nach mehr als 350 Jahren, einen Beweis für alle n. Ob Fermat ↪ selbst wirklich einen Beweis gefunden hatte, wird wohl für immer ein Rätsel bleiben. Für $n = 2$ erhält man eine ganzzahlige Version des Satzes von Pythagoras ↪, der von so genannten ‘pythagoreischen Tripeln’ ↪ wie etwa $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ gelöst wird.

Größter gemeinsamer Teiler

Der *größte gemeinsame Teiler* zweier natürlicher Zahlen ist diejenige natürliche Zahl, die beide Zahlen ohne Rest teilt, wobei es keine größere natürliche Zahl geben darf, die das ebenfalls tut. Man schreibt dann

$ggT(x,y) = z$. Den ggT kann man mit Hilfe der Primfaktoren der beiden Zahlen oder mit Hilfe des euklidischen ↪ Algorithmus' ↪ bestimmen.

Bsp.: $ggT(4,6) = 2$ (der *größte gemeinsame Teiler* von 4 und 6 ist 2)
$ggT(10,15) = 5$
$ggT(3,6) = 3$

Haus vom Nikolaus

Das Haus vom Nikolaus ist ein beliebtes Kinderrätsel, bei dem man versucht ein Haus mit fünf Ecken ↪ und acht Kanten ↪ zu zeichnen, ohne den Stift abzusetzen oder eine Strecke zweimal zu zeichnen. Mathematisch kann man das Haus vom Nikolaus als Graph auffassen. Betrachtet man, wie viele Kanten ↪ von einer Ecke ↪ abgehen, stellt man fest, dass von allen Ecken ↪, bis auf die unteren beiden, eine gerade Anzahl abgeht. Von den unteren beiden Ecken ↪ gehen jeweils drei Kanten ↪ ab. Man sagt auch, dass diese Ecken ↪ den Grad drei besitzen. Anhand dieser Vorüberlegung kann man anschaulich sehen, dass man an den beiden unteren Ecken mit dem Zeichnen beginnen muss, um das Rätsel zu lösen. Man endet immer bei der anderen unteren Ecke ↪. In der Mathematik sagt man, dass ein Euler ↪ weg existiert. Für jede der beiden unteren Ecken ↪ gibt es 44 Möglichkeiten, um das Haus ohne abzusetzen und ohne einen Weg mehrmals zu gehen, zu zeichnen. Das kann man durch langes Ausprobieren herausbekommen oder mittels eines Algorithmus ↪.

Homo Rudolfensis

Der *Homo Rudolfensis* ist der älteste Vertreter der Gattung Homo, zu der auch wir Menschen gehören. Es ist also unser ältester Vorfahre. Er ist mit der Zeit ausgestorben, die Gründe dafür sind unbekannt. Der erste Fund in Form eines Schädels wurde 1972 in Kenia am Turkana-See gemacht. Der See hieß früher Rudolfsee, von dem auch der Name *Homo Rudolfensis* abgeleitet wurde. Auch gab es Funde in Äthiopien und Malawi. Der älteste Fund ist ein Unterkiefer, dessen Alter auf 2,5 Millionen Jahre bestimmt wurde. Man geht davon aus, dass der *Homo Rudolfensis* etwa 150cm groß war und 50kg gewogen hat. Außerdem ist es wahrscheinlich, dass er über längere Zeiträume hinweg auf zwei Beinen gehen konnte.

Inverses

Es gibt zu jeder Zahl (außer der 0) ein *Inverses* bezüglich der Addition und eines bezüglich der Multiplikation. Das *Inverse* bezüglich der Addition, das so genannte *additive Inverse*, gibt es in den Zahlenräumen der ganzen, der rationalen und der reellen Zahlen ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$). Das *additive Inverse* zu einer Zahl ist die Zahl selbst mit anderem Vorzeichen, denn, wenn man die beiden Zahlen addiert, erhält man das neutrale Element ↪ bezüglich der Addition.

Bsp.: Das *additive Inverse* zu 5 ist -5, denn $5 + (-5) = 0$.

Das Inverse bezüglich der Multiplikation, das so genannte *multiplikative Inverse*, gibt es in den Zahlenräumen der rationalen und der reellen Zahlen ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$). Das *multiplikative Inverse* zu einer Zahl ist der Kehrbruch der Zahl, denn, wenn man die beiden Zahlen multipliziert, erhält man das neutrale Element ↪ bezüglich der Multiplikation.

Bsp.: Das *multiplikative Inverse* zu 5 ist $\frac{1}{5}$, denn $5 \cdot \frac{1}{5} = 1$

Das *multiplikative Inverse* zu $\frac{3}{-7}$ ist $\frac{-7}{3}$, denn $\frac{3}{-7} \cdot \frac{-7}{3} = 1$

Irrationale Zahlen

Die *irrationalen Zahlen* sind solche, die man nicht als Bruch darstellen kann. Beispiele sind $\sqrt{2}$, π ↪, e und der Goldene Schnitt ↪. 1,5 ist keine *irrationale Zahl*, da man statt 1,5 auch ⅔ schreiben kann. Zusammen mit den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ergeben sie die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Schreibt man eine *irrationale Zahl* in Dezimalschreibweise, dann ist sie nicht periodisch und es gibt unendlich viele Nachkommastellen. Sie waren schon den Pythagoreern bekannt und Euklid definierte sie in seinem Buch Die Elemente ↪. Dort gab er auch einen Beweis für die Irrationalität von $\sqrt{2}$. Entdeckt wurde die Irrationalität, als man die Diagonale in einem Quadrat mit Seitenlänge 1 mit dem Satz des Pythagoras ausrechnen wollte und sich fragte, ob die Lösung ($\sqrt{2}$, die Wurzel ↪ war damals aber noch nicht bekannt) als Bruch darstellbar ist. Die Entdeckung brachte die damalige Mathematik in eine große Krise, da man allgemein davon ausging, dass jede Zahl als Bruch darstellbar sei. Auch Pythagoras war fest davon überzeugt. Bis heute konnte man für manche Zahlen noch nicht zeigen, ob sie *irrational* sind, z.B. π ↪ $+ e$. Man weiß aber, dass es unendlich viele *irrationale Zahlen* geben muss.

Kanten

In der Graphentheorie gehört zu einem Graph immer eine Menge von Ecken↪ bzw. Knoten und *Kanten*. Die Ecken↪ werden durch *Kanten* verbunden, wobei aber nicht alle Ecken↪ miteinander verbunden sein müssen. D.h. die *Kanten* geben an, welche Ecken↪ miteinander in Verbindung stehen.

Kartesisches Koordinatensystem

Das *kartesische Koordinatensystem* wird weltweit am häufigsten verwendet. Auch in der Schule lernt man es kennen und aktiv mit ihm zu arbeiten. Es wurde nach René Descartes↪ benannt, obwohl dieser es nicht erfunden, dafür aber verbreitet hat. Im zwei-dimensionalen besteht es aus zwei Achsen, die orthogonal aufeinander stehen. Sie schneiden sich im Ursprung, dem Punkt O (0|0). Die horizontale Achse wird Abszissenachse, die vertikale Achse Ordinatenachse genannt. In der Schule sind sie als x–Achse und y–Achse bekannt. Im dreidimensionalen kommt die Applikate bzw. z–Achse hinzu. Diese ist dann die vertikale Achse, während die anderen beiden in der Ebene liegen. Man nutzt das *kartesische Koordinatensystem*, um Punkte (Koordinaten) einzutragen oder Funktionsgraphen einzuzeichnen. Damit hat es beispielsweise einen großen Nutzen in der Physik, dem Vermessungswesen und der Navigation.

Kartesisches Produkt

Das *kartesische Produkt* kennt man nicht nur durch die kartesischen Koordinaten, es gibt auch viele Alltagsbeispiele. In einem kartesischen Koordinatensystem kann man Punkte einzeichnen, z.B. im zweidimensionalen $P(2|3)$. Man nennt diese kartesische Koordinaten, sie entstehen durch das *kartesische Produkt* von zwei Mengen, z.B. von der Menge der natürlichen Zahlen mit sich selbst. Im Alltag begegnet einem das kartesische Produkt beispielsweise beim Schachspielen oder beim Spiel „Schiffe versenken“. Auf einem Schachbrett werden die Zeilen↪ mit den Zahlen 1 bis 7 und die Spalten↪ mit den Buchstaben A bis H gekennzeichnet. Man hat also zwei Mengen: $A_1=\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$ und $A_2=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Bildet man das *kartesische Produkt* dieser beiden Mengen, erhält man alle möglichen Tupel mit Elementen aus A_1 und A_2. Man schreibt dann

$$A_1 \times A_2 = \{(A,1), (B,1), \dots , (H,1) , (A,2), (B,2), \dots ,(H,2), (A,7), (B,7), \dots , (B,8)\}$$

An erster Stelle steht immer ein Element aus A_1, an zweiter Stelle eines aus A_2. Nun kann man für jede Schachfigur angeben auf welchem Feld sie gerade steht: das Pferd auf $(H,2)$, der Turm auf $(E,5)$, usw. Für das *kartesische Produkt* gilt, im Gegensatz zum Produkt der herkömmlichen Multiplikation, weder das Kommutativ, noch das Assoziativgesetz, da die Reihenfolge der Elemente eine Rolle spielt. Das heißt, $A \times B \neq B \times A$ und $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$.

Kleiner Gauß

Der *kleine Gauß* ist eine berühmte Formel, um die ersten n natürlichen Zahlen aufzuaddieren. Der Legende nach bekam die Klasse des neunjährigen Gauß↪ die Aufgabe, die ersten 100 natürlichen Zahlen zu addieren und während alle anderen Schüler fleißig rechneten, hatte Gauß↪ das Ergebnis schon nach wenigen Sekunden auf seiner Tafel stehen. Wie hatte er das geschafft? Sicherlich war Gauß↪ ein guter Kopfrechner, aber er addierte nicht einzeln alle Zahlen, sondern fand eine Formel mit der man das Ergebnis in einem Schritt berechnen konnte:

$$1 + 2 + \cdots + 100 = \frac{100 \bullet (100 + 1)}{2} = 5050$$

bzw. allgemeiner für alle natürlichen Zahlen:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

Damit brachte Gauß↪ seinen Lehrer und all seine Klassenkameraden ins Staunen. Die Summenformel war vielen Mathematikern allerdings schon lange vor Gauß↪ bekannt.

Kleinstes gemeinsames Vielfache (kgV)

Das *kleinste gemeinsame Vielfache* zweier Zahlen ist diejenige Zahl, die Vielfaches von beiden Zahlen ist, wobei es keine kleinere Zahl geben darf, für die das auch gilt. Vielfaches bedeutet, dass eine Zahl in eine andere „hineinpasst". 6 ist also ein Vielfaches von 2 (weil $2 \cdot 3 = 6$), nicht aber von 4. Man schreibt dann $kgV(x,y) = z$. Das kgV kann man mit Hilfe der Primfaktoren der beiden Zahlen bestimmen.

Bsp.: $kgV(4,6) = 12$ (das *kleinste gemeinsame Vielfache* von 4 und 6 ist 12)
$kgV(10,15) = 30$
$kgV(3,6) = 6$

Komplexe Zahlen

Die *komplexen Zahlen* sind ein noch größerer Zahlenraum als die reellen Zahlen. Man kann sie sich also als eine Erweiterung der reellen Zahlen vorstellen, sowie die rationalen Zahlen eine Erweiterung der ganzen Zahlen sind. Was den Zahlenraum der *komplexen Zahlen* vor allem von den anderen Zahlenräumen unterscheidet, ist, dass es in ihm eine so genannte imaginäre Einheit i gibt. Dank ihr sind Rechnungen möglich, die in den reellen Zahlen nicht funktionieren. So ist $i^2 = -1$, während man in den reellen Zahlen keine Zahl findet, die mit sich selbst multipliziert -1 ergibt. Jede *komplexe Zahl* hat einen Realteil und einen Imaginärteil.

Konvexe Menge

Wir stellen uns eine geometrische Figur oder einen geometrischen Körper vor. Wähle ich nun zwei beliebige Punkte aus der Figur (dem Körper), ziehe die Verbindungslinie (d.h. der kürzeste Weg, der beide Punkte verbindet) zwischen ihnen und stelle fest, dass auch die Verbindungslinie innerhalb der Figur (des Körpers) ist, dann nenne ich die Figur (den Körper) *konvex*. Die Aussage muss für alle Punkte gelten, da ich sie ja beliebig wähle! Man spricht auch von *konvexer Menge*, da eine geometrische Figur nichts anderes ist, als eine Menge von Punkten im $\mathbb{R}^2$, bzw. ein geometrische Körper eine Menge von Punkten im $\mathbb{R}^3$.

Bsp.: Geraden, Kreise, Dreiecke und die platonischen Körper sind *konvex*.
Sterne, Figuren oder Körper, die ein Loch haben (wie z.B. der Donut) und der menschliche Körper sind nicht *konvex*.

Konvexität bleibt unter manchen Operationen erhalten. Berechne ich z.B. das kartesische Produkt ↪ von zwei *konvexen* Mengen, dann ist das Ergebnis wieder *konvex*. Es gibt auch *konvexe* und konkave Funktionen. Die lernt man in der Oberstufe kennen, wo man sie sicher schneller versteht, wenn man schon verstanden hat, was eine *konvexe Menge* ist.

Kryptographie

Die *Kryptographie* beschäftigt sich mit der Frage, wie man Informationen verschlüsseln und sicher übertragen kann, sodass niemand Unbefugtes darauf zugreifen oder die Informationen manipulieren kann. Das Wort *Kryptographie* kommt aus dem Griechischen und bedeutet Geheimschrift. Es werden Methoden entwickelt, mit denen wir unsere E-Mails verschlüsselt verschicken können und in WhatsApp schreiben können, ohne dass jemand mitliest. Die Verschlüsselung von Daten spielt auch eine wichtige Rolle, wenn wir eine Cloud oder Online-Banking benutzen oder im Internet einkaufen möchten. Die Methoden nennt man kryptographische Verfahren. Als es noch keine Computer gab, bestanden sie darin, Buchstaben anders anzuordnen oder zu ersetzen. Heutzutage benutzt man den Computer, was komplexere Verfahren ermöglicht, die auch schwieriger zu entschlüsseln sind. Man verschlüsselt keine einzelnen Buchstaben mehr, sondern Daten, so dass auch nicht mehr nur Texte verschlüsselt werden können. Allgemein wird zwischen symmetrischer und asymmetrischer Verschlüsselung unterschieden. Bei der symmetrischen Verschlüsselung ist der Schlüssel für die Ver- und Entschlüsselung der gleiche, während es bei einer asymmetrischen Verschlüsselung jeweils einen anderen Schlüssel gibt. Man spricht dann von einem öffentlichen Schlüssel (für die Verschlüsselung) und einem privaten Schlüssel (für die Entschlüsselung). In der modernen *Kryptographie* kommt Mathematik ins Spiel. Oft verwendet man ein mathematisches Problem (z.B. eine Rechenoperation), was schwer zu lösen ist und wofür selbst ein Computer viele Jahre brauchen würde. Der Empfänger einer Nachricht bekommt den Schlüssel, also die Lösung, und kann die Nachricht lesen. Möchte aber jemand Drittes mitlesen, ist es für ihn unmöglich das Ergebnis herauszufinden und er kann die Nachricht nicht entschlüsseln. Ein bekanntes und einfaches Beispiel für eine asymmetrische Verschlüsselung ist die Faktorisierung. Jede natürliche Zahl kann in Prim↪faktoren zerlegt werden:

$$6 = 3 \cdot 2,\ 35 = 5 \cdot 7,\ 128 = 2^6$$

Es gibt jedoch keinen effizienten Algorithmus↪, um diese Prim↪faktoren schnell zu finden. Besteht eine sehr große Zahl nun aus nur zwei Prim↪faktoren, dann ist es fast unmöglich diese zu finden. Selbst ein sehr schneller Computer würde dafür tausende von Jahren brauchen! Im Gegensatz dazu, ist es sehr einfach zwei hohe Primzahlen↪ miteinander zu multiplizieren. Das macht sich die *Kryptographie* zu nutze. Der öffentliche Schlüssel, den jeder sehen kann ist die sehr große Zahl. Der private Schlüssel, mit dem man eine Nachricht entschlüsseln kann, sind die beiden Prim↪faktoren, aus denen sie besteht. Diesen enthält nur der Empfänger einer Nachricht. Jeder, der die Nachricht unerlaubt mitlesen will, sieht nur die große Zahl und kann keine Prim↪faktoren zu ihr finden, was es ihm unmöglich macht, die Nachricht zu lesen.

Liliputaner

Ein *Liliputaner* ist ein kleinwüchsiger Mensch. Ein Erwachsener gilt ab einer Körpergröße von unter 150cm als kleinwüchsig. Ursachen gibt es verschiedene, sowohl prä-, als auch postnatale. Den Begriff *Liliputaner* verwendet man heute nicht mehr, da er als abwertend empfunden wird. Ebenfalls heißen die Bewohner der Insel Liliput im Roman „Gullivers Reisen“ (Jonathan Swift, 1726) *Liliputaner*.

Magische Quadrate

Ein *magisches Quadrat* ist ein Quadrat mit n Zeilen↪ und n Spalten↪ (wie bei einem Sudoku) mit Einträgen von 1 bis n^2, wobei das Quadrat bestimmte Bedingungen erfüllen muss. Die Einträge in jeder Zeile und jeder Spalte, sowie die Einträge auf den beiden Hauptdiagonalen müssen die gleiche Summe ergeben. Diese Summe heißt dann die magische Zahl und kann bei vorgegebener Zeilen↪- und Spalten↪anzahl mit einer Formel berechnet werden. Diese lautet

$$\frac{n^3 + n}{2}$$

Auch gibt es verschiedene Verfahren, um *magische Quadrate* zu konstruieren, wie z.B. das siamesische Verfahren. Das älteste bekannte *magische Quadrat* heißt Lo-Shu und stammt aus China, etwa 2800 v. Chr. Es ist ein 3×3–Quadrat und das einzige *magische Quadrat* dieser Größe. Ein *magisches Quadrat* der Größe 2×2 existiert nicht.

Marianengraben

Der *Marianengraben* ist ein Tiefseegraben im westlichen Pazifik. In ihm liegt die (nach heutigem Stand) tiefste Stelle der Ozeane, das Witjastief 1, benannt nach dem Forschungsschiff, das die Tiefe maß. Das Witjastief ist etwa 11.034m tief und 2.400km lang. Die einzigen Menschen die jemals dort waren sind die Forscher Jacques Piccard, Don Walsh (1960) und James Cameron (2012).

Mayas

Die *Mayas* sind eines der bekanntesten indigenen Völker Lateinamerikas, das noch bis heute in Mexiko, Belize, Guatemala, Honduras und El Salvador lebt. Der europäischen Welt wurden die *Mayas* durch die „Entdeckung“ Amerikas (1492) bekannt, doch sie existierten schon etwa seit 2000 v. Chr. Sie waren kein einheitliches Volk, das nur an einem Ort lebte, sondern sie teilten sich in unterschiedliche Völker mit voneinander abweichenden, aber trotzdem noch ähnlichen Sprachen auf, die sich über verschiedene Teile Mittelamerikas ausbreiteten. Zwischen 600–900 n. Chr. erreichten sie ihre Blütezeit, im 9./10. Jhdt. kommt es zum Zusammenbruch der Maya-Gesellschaft, der bis heute in der Forschung noch nicht geklärt ist. Die spanischen Eroberer konnten erst in den 1540ern das komplette Maya-Gebiet unterwerfen, nachdem sie lange an Widerstand der Indigenen gescheitert waren. Der Versuch die *Mayas* zu christianisieren hatte nur zu Teilen Erfolg und war oft mit Grausamkeiten und brutalen Methoden verbunden. Bis heute leben die meisten Völker der *Mayas* vom Maisanbau, sie sind aber auch für ihre (vor allem in früheren Zeiten) hochentwickelte Kultur berühmt. Sie hatten eine eigene Schrift (die Maya-Schrift), ein eigenes Zahlensystem und einen eigenen Kalender. Sehr interessant sind auch ihre Religion und ihre großartige Architektur.

Median

Der *Median* ist ein Mittelwert und wird in der Wahrscheinlichkeitsrechnung ↪ und der Statistik gebraucht. Im Gegensatz zum arithmetischem Mittel (das ist nichts anderes als der Durchschnitt), bei dem man die Summe aller Zahlen durch die Anzahl der Zahlen teilt, nimmt man beim *Median* tatsächlich die Mitte der Zahlen. Dazu ordnet man die Zahlen zunächst der Größe nach und bestimmt die Anzahl der Zahlen. Ist diese ungerade, dann kann man einfach die Mitte bestimmen. Der *Median* ist dann der Wert der Zahl in der Mitte. Ist die Anzahl gerade, so nimmt man die beiden mittleren Zahlen und bekommt den *Median*, indem man sie addiert und durch 2 teilt, also ihren Durchschnitt nimmt. Der *Median* hat gegenüber dem arithmetischen Mittel den Vorteil, dass so genannte Ausreißer seinen Wert nicht verfälschen. D.h. einzelne sehr große oder kleine Zahlen haben keinen Einfluss auf ihn.

Bsp.: Man hat folgende Zahlen gegeben: –5, 3, 0, 7, 7, 2, 4
Der Größe nach ordnen ergibt: –5, 0, 2, 3, 4, 7, 7
Es gibt insgesamt 7 Zahlen (Anzahl ist ungerade)
⇒ Die Mitte ist die 4. Zahl, also die 3.
⇒ Der *Median* der obigen Zahlen ist 3.

13, 11, 14, 12, 13, 50
⇒ 11, 12, 13, 13, 14, 50
⇒ Anzahl der Zahlen: 6 (gerade)
⇒ Die beiden mittleren Zahlen sind 13 und 13.

⇒ Der *Median* ist

$$\frac{13+13}{2} = \frac{26}{2} = 13$$

Im Vergleich das arithmetische Mittel ist:

$$\frac{13+11+14+12+13+50}{6} = \frac{113}{6} \approx 18{,}83$$

Die Zahl 50 hat dafür gesorgt, dass das arithmetische Mittel groß wird, obwohl die meisten Zahlen um einiges kleiner als 18,83 sind. Der *Median* liefert also einen besseren Mittelwert.

Meridian

Ein *Meridian* ist ein halber Längenkreis (bzw. Großkreis, der in Nord-Süd-Richtung verläuft) auf der Erdoberfläche. Er verläuft also vom Nord- zum Südpol und verbindet alle die Orte auf der Erde, an denen zur selben Zeit Mittag ist. Mit Hilfe des *Meridians* kann man verschiedene Zeitzonen und Zeitverschiebungen bestimmen. Die Erde braucht 24h (1440min), um sich einmal um sich selbst, also um 360°, zu drehen. Unterscheiden sich zwei *Meridiane* nun um 1°, so braucht die Erde 4min, um von einem *Meridian* zum nächsten „weiterzudrehen“. Befindet sich ein Ort 15 *Meridiane* von einem anderen entfernt, dann braucht es 1h bis der eine Ort genau an derselben Stelle wie der andere ist und die Orte haben eine Zeitverschiebung von 1h. Da am Nord- und Südpol alle *Meridiane* zusammenlaufen, fallen hier alle Zeitzonen der Welt zusammen. Es gibt einen so genannten Nullmeridian, der als Referenzpunkt für die Messung von geografischen Längen verwendet wird. Da sich die *Meridiane* eigentlich nicht unterscheiden, ist es egal, welchen man als Nullmeridian nimmt. Man hat sich auf der Internationalen Meridiankonferenz auf den *Meridian*, der durch Großbritannien geht (Greenwich-Meridian), geeinigt.

Millenium-Probleme

Die *Millenium-Probleme* sind sieben ungelöste und sehr wichtige Probleme der Mathematik. Sie wurden im Jahr 2000 vom Clay Mathematics Institute in Cambridge herausgegeben. Für die Lösung eines dieser Probleme erhält man ein Preisgeld von 1.000.000 Dollar. 2002 schaffte es ein russischer Mathematiker (Grigori Jakowlewitsch Perelman) eines der Probleme (die Poincaré-Vermutung) zu lösen, lehnt das Preisgeld aber ab.

Möbiusband
Das *Möbiusband* (benannt nach dem Mathematiker Ferdinand Möbius) ist eine Fläche, bei der man weder oben und unten, noch innen und außen unterscheiden kann. Auch wenn es auf den ersten Blick so erscheint, als gäbe es zwei Seiten und zwei Kanten, stellt man beim genaueren Betrachten fest, dass das Band nur eine Seite und eine Kante hat. Färbt man es z.B. auf einer Seite ein, so wird am Ende das gesamte Band eingefärbt sein. Interessant sind auch die Flächen, die man erhält, wenn man das Band entlang der Mittellinie halbiert oder drittelt, viertelt, usw. Das *Möbiusband* kommt in der Natur vor (z.B. können sich bestimmte Teilchen mit Ladung auf einem *Möbiusband* bewegen), wird in der Technik verwendet und wurde oft in Filmen, der Literatur und der Kunst rezipiert. Das Commerzbank-Logo ist ebenfalls ein *Möbiusband*.

Neutrales Element
Das *neutrale Element* existiert in allen Zahlenräumen, die man aus der Schule kennt. Es gibt ein *neutrales Element* bezüglich der Addition und eines bezüglich der Multiplikation. Bei der Addition ist das *neutrale Element* die 0. Denn wenn man die 0 zu einer Zahl (egal welcher) addiert, bleibt diese gleich.

Bsp.: $-7 + 0 = -7$

Bei der Multiplikation ist das *neutrale Element* die 1. Denn wenn man die 1 mit einer Zahl (egal welcher) multipliziert, bleibt diese gleich.

Bsp.: $1 \cdot 2736 = 2736$

Die 0 und die 1 verändern also nichts, sie sind neutral.

Osterformel
Nach kirchlichem Beschluss wird Ostern immer am ersten Sonntag nach dem Frühlingsvollmond (dem ersten Vollmond im Frühling) gefeiert. Frühlingsanfang ist der 21. März, womit der Frühlingsvollmond auf einen Tag zwischen dem 21.März und dem 19.April fallen kann. Carl-Friedrich Gauß entwickelte im Jahr 1800 eine Formel zur Berechnung des Osterdatums, die *Osterformel*. Mit ihr kann man für ein beliebiges Jahr den Sonntag, an dem Ostern gefeiert wird, ausrechnen.

Pascalsches Dreieck

Die Einträge des *Pascalschen Dreiecks* entsprechen dem Binomialkoeffizienten, den man in der Oberstufe kennenlernt. Während dieser mit der Fakultät ↪ und einem Bruch berechnet werden muss, lassen sich die Einträge des *Pascalschen Dreiecks* sehr einfach berechnen.

Das Dreieck beginnt mit einer 1, wir stellen uns rechts und links neben ihr jeweils eine 0 vor. Die restlichen Einträge ergeben sich dann aus der Summe der beiden darüberstehenden Einträge:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1
\end{array}
$$

Man kann erkennen, dass auf der linken und rechten Diagonale ganz außen nur Einsen stehen. Das Dreieck hat aber noch weitere überraschende Eigenschaften: Auf der zweiten Diagonalen findet sich die Folge der natürlichen Zahlen (1, 2, 3, 4, …), auf der dritten Diagonalen die Dreieckszahlen (1, 3, 6, 10, 15, 21, …) und wenn man die flachen Diagonalen aufsummiert erhält man die Fibonacci-Zahlen ↪. Summiert man die Zeilen ↪ einzeln auf, dann stellt man fest, dass sich die Summe in jeder Zeile verdoppelt. Wenn man in China, Italien oder dem Iran mit einem Mathematiker über das *Pascalsche Dreieck* sprechen möchte, dann wird dieser wahrscheinlich nicht wissen, von was man redet, denn dort hat das Dreieck einen anderen Namen. In China heißt es Yang-Hui-Dreieck, im Iran Chayyām-Dreieck und in Italien Tartaglia-Dreieck. Bei uns ist es nach dem Mathematiker Blaise Pascal benannt. Der früheste Fund eines *Pascalschen Dreiecks* in einem indischen Buch geht auf das 10. Jhdt. zurück. Pascal beschrieb das Dreieck erst im Jahr 1655.

Pi

Schon seit hunderten von Jahren sind die Menschen auf der Suche nach den Nachkommastellen der Kreiszahl π. Schon Archimedes ↪ war bekannt, dass das Verhältnis vom Umfang eines Kreises zu seinem Durchmesser unabhängig von der Größe des Kreises ist. Teilt man also den Umfang durch den Durchmesser ist das Ergebnis immer die gleiche Zahl, nämlich π. Lange wusste man aber nicht, ob π irrational ↪ oder rational ist und hatte deshalb die Hoffnung irgendwann alle Nachkommastellen gefunden zu haben. Im 18. Jhdt. konnte Johann Heinrich Lambert dann beweisen, dass

π irrational ↪ ist und man somit nie alle Nachkommastellen finden wird, weil es unendlich viele gibt. Trotzdem bemühen sich die Mathematiker möglichst viele Nachkommastellen zu finden. Der aktuelle Rekord (2016) liegt bei 22.459.157.718.361 Stellen. Der Computer brauchte für die Berechnung 105 Tage. Das Auswendiglernen der Nachkommastellen wurde sogar zu einem Sport, dem Pi-Sport. Der aktuelle offizielle Rekord (2015) liegt hier bei 70.000 Stellen. Rajveer Meena brauchte dabei zum Aufsagen 10h. Mit Hilfe von π kann man den Umfang eines Kreises und seinen Flächeninhalt bestimmen. Der so genannte Einheitskreis (ein Kreis mit Radius der Länge 1) hat den Flächeninhalt π und den Umfang 2π. Es gibt noch viele weitere nützliche Formeln, vor allem in der Physik, die π enthalten. Auch für die Näherung an die Kreiszahl gibt es unzählige Verfahren: geometrische, numerische, experimentelle, usw. Auch mit Hilfe des Buffonschen Nadelproblems ↪ kann man sich π annähern. Die Zahl wurde oft in Büchern und Filmen rezipiert. So z.B. in einem Roman von Thomas Mann und einer Folge von Raumschiff Enterprise. Außerdem wird π mit Radioteleskopen ins Weltall geschickt, da Wissenschaftler glauben, dass Außerirdische die Kreiszahl kennen müssten, wenn sie solche Signale empfangen können.

Potenz

Die *Potenz* ist das Ergebnis des Potenzierens. Dies ist ebenfalls eine Rechenart, gehört aber nicht zu den Grundrechenarten. Beim Potenzieren wird eine Zahl n-mal mit sich selbst multipliziert. Man schreibt dann z.B. 4^3, um $4 \cdot 4 \cdot 4$ zu rechnen. Die *Potenz* wäre dann 64. Das Potenzieren ist also wie eine Abkürzung für das Multiplizieren, wenn man immer dieselbe Zahl multipliziert. Man spricht von der Basis und vom Exponenten. Der Exponent ist die Hochzahl (im Beispiel 3) und die Basis ist die Zahl, die man mit sich selbst multiplizieren möchte (im Beispiel 4). Man kann als Exponenten nicht nur natürliche Zahlen, sondern auch reelle Zahlen verwenden. So ist z.B.

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2}$$

Prim

Die Primzahlen in den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sind diejenigen, die nur durch sich selbst und durch 1 teilbar sind, also 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, … *Prim* ist eine allgemeinere Definition, von der sich die Definition für Primzahlen ableitet. Zahlen die *prim* sind, kann man also nicht nur in dem

Zahlenraum ℕ bestimmen. Aber wann ist eine Zahl *prim*? Wir nehmen eine Zahl, die eine beliebige andere Zahl teilt. Die andere Zahl ist das Produkt zweier Faktoren ist. Wenn nun folgt, dass die Zahl vom Anfang schon einen der beiden Faktoren teilt, dann heißt sie *prim*.

Bsp.: 2 ist *prim*, da z.B. $2|18$, $18 = 3\cdot 6$ und $2|6$. Die Folgerung muss aber für alle möglichen Produkte und Faktoren gelten. Egal welches Produkt und welche beiden Faktoren ich nehme, 2 muss einen der Faktoren teilen.

4 ist nicht *prim*, da $4|36$, $36 = 6 \cdot 6$, aber $4\nmid 6$.

Erfüllt eine Zahl in ℕ diese Eigenschaft, dann erfüllt sie automatisch auch die Eigenschaft, dass sie nur durch 1 und durch sich selbst teilbar, also eine Primzahl ist. Da letztere Eigenschaft leichter nachzuweisen ist, lernt man diese in der Schule.

Puszta

Die *Puszta* ist eine Landschaft, die vor etwa 35.000 Jahren entstand. Sie erstreckt sich über Teile von Ungarn, Österreich und der Slowakei. Die Landschaft entstand als Waldsteppe, entwickelte sich zur Grassteppe und letztlich durch landwirtschaftliche Nutzung durch den Menschen zur Kultursteppe. Im Hortobágyi-Nationalpark (UNESCO-Welterbe), der sich in der *Puszta* befindet, kann man noch die alte Steppenlandschaft vorfinden, sowie viele seltene Tierarten bewundern.

Pythagoreisches Tripel

Das *pythagoreische Tripel*, sind drei natürliche Zahlen, die folgende Gleichung erfüllen:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Also z.B. (3, 4, 5) oder (8, 15, 17). Wie man aus dem Satz des Pythagoras ↪ weiß, sind die Wurzeln dieser Zahlen die Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks. Man spricht von einem primitiven *pythagoreischen Tripel*, wenn die drei Zahlen keinen gemeinsamen Teiler haben und damit nicht durch ein anderes *pythagoreisches Tripel* darstellbar sind. (3, 4, 5) ist also ein primitives *pythagoreisches Tripel*, da $ggT(3{,}4{,}5) = 1$, während (6, 8, 10) nicht primitiv ist, da $\mathrm{ggT}(6{,}8{,}10) = 2$ und $(2 \cdot 3, 2 \cdot 4, 2 \cdot 5) = (6, 8, 10)$. Es gibt unendlich vieler solcher Tripel und sogar ein Verfahren, um ein *pythagoreisches Tripel* anhand von zwei beliebigen natürlichen Zahlen zu finden. Tauscht man in der Gleichung den Exponenten durch eine größere natürliche Zahl (z.B. 3 oder 5), dann gibt es für sie keine Lösung mehr, wenn man nur natürliche Zahlen zulässt. Diese Aussage ist als großer Fermatscher Satz ↪ bekannt.

Pyramiden von Gizeh

Die *Pyramiden von Gizeh* sind das einzige noch erhaltene der sieben Weltwunder der Antike. Sie befinden sich in Ägypten, nahe der Stadt Gizeh. Gebaut wurden sie zwischen 2620 und 2500 v. Chr., womit sie eines der ältesten noch erhaltenen Bauwerke der Menschheit sind. In der größten der Pyramiden, der Cheops-Pyramide, ist der Pharao Cheops begraben. Sie wurde mit drei Millionen Steinblöcken gebaut, die jeweils 2,5t wiegen. Besonders beeindruckend ist, dass man diese Steine nicht, wie heute mit einem Kran, sondern über schiefe Ebenen transportierte. Seit 1979 sind sie UNESCO-Welterbe.

Quadratur der Parabel

Unter der *Quadratur der Parabel* versteht man eine Methode Archimedes‘ ↪, um den Flächeninhalt eines Parabelsegments zu bestimmen. Heutzutage berechnet man Flächeninhalte mittels der Integralrechnung, diese war aber damals noch nicht bekannt. Archimedes ↪ schrieb ein Dreieck in die Parabel ein, indem er zwei beliebe Punkte A und B wählte, durch die er eine Gerade zeichnete. Als Punkt C wählte er den Scheitelpunkt des abgetrennten Parabelteils, also den Berührpunkt der Parallelen zu AB und der Parabel. Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist leicht zu bestimmen ($\frac{1}{2} \cdot Grundseite \cdot Höhe$). Nun zeichnete Archimedes weitere Dreiecke in den leeren Platz zwischen den Katheten und der Parabel ein. Dies kann man unendlich lange fortsetzen, die Dreiecke werden dabei immer kleiner und häufiger. Auch kann man feststellen, dass sie in einem bestimmten Verhältnis zum großen anfänglichen Dreieck stehen. Je mehr Dreiecke man zeichnet, desto mehr nähert man sich der Fläche des Parabelsegments an. Summiert man also unendlich lange die Flächeninhalte der Dreiecke auf, so erhält man den Flächeninhalt des Parabelsegments. Tatsächlich war es Archimedes ↪ möglich, diese unendliche Summe zu bestimmen und er konnte zeigen, dass der Flächeninhalt des Parabelsegments $\frac{4}{3}$ des Flächeninhalts des Dreiecks ABC ist, also:

$$F_{Parabel} = \frac{4}{3} \cdot \Delta ABC$$

Quersumme
Um die *Quersumme* einer Zahl auszurechnen, addiert man die einzelnen Ziffern der Zahl. Die *Quersumme* kann nützlich sein, um z.B. die Zahl auf Teilbarkeit zu prüfen.

Bsp.: 245 hat die *Quersumme* $2 + 4 + 5 = 11$

Quotient
Der *Quotient* zweier Zahlen ist das Ergebnis, das man erhält, wenn man die zwei Zahlen teilt.
Bsp.: Der *Quotient* von 6 und 3 ist die Zahl 2, da $6 : 3 = 2$

Relativitätstheorie
Was besagt eigentlich die *Relativitätstheorie* von Albert Einstein↪. Sie wurde Anfang des 20. Jhdts. veröffentlicht und stellte einen Meilenstein in den Grundlagen der Physik dar. Diese war von der Newtonschen Vorstellung geprägt. Man unterscheidet zwischen der speziellen und der allgemeinen *Relativitätstheorie*, wobei letztere ausgehend von der ersten entwickelt wurde. Erste Theorie besagt unter anderem, dass die Lichtgeschwindigkeit konstant ist, d.h. egal ob ich mich gerade nicht bewege und auf einem Stuhl sitze oder ob ich sehr schnell renne, würde ich dieselbe Geschwindigkeit eines Lichtstrahls messen. Auch ist die Lichtgeschwindigkeit die größte aller Geschwindigkeiten, d.h. kein Objekt kann sich jemals schneller als mit Lichtgeschwindigkeit fortbewegen, denn dazu bräuchte es unendlich viel Energie. Eine weitere wichtige Aussage ist die Relativität von Raum und Zeit. Sie besagt, dass die räumliche und zeitliche Wahrnehmung nicht absolut ist, sondern relativ, da sie vom Beobachter und seinem Bewegungszustand relativ zu dem beobachteten Objekt abhängt. So vergeht die Zeit auf einer bewegten Uhr langsamer relativ zu einer Uhr, die sich nicht bewegt. Der Unterschied wird aber erst wirklich deutlich, wenn sich die Uhr nahe der Lichtgeschwindigkeit bewegen würde. Der Begriff der Raumzeit stammt ebenfalls aus der speziellen *Relativitätstheorie*. Er erweitert die drei Raumdimensionen im kartesischen Koordinatensystem↪ um eine vierte Dimension und man erhält die vierdimensionale Raumzeit. In der *Relativitätstheorie* sind Raum und Zeit fast gleichwertig (mathematisch besteht der Unterschied nur in einem Vorzeichen), weswegen man sie zu einer Raumzeit vereinigen kann. Dass wir Menschen beides als etwas Unterschiedliches wahrnehmen, liegt an unserer Wahrnehmung. Die berühmte Gleichung $E = m \cdot c^2$, (E = Energie, m = Masse, c = Lichtgeschwindigkeit) besagt, dass sich Energie

und Masse proportional zueinander verhalten. Wenn also ein Objekt an Energie gewinnt, dann auch an Masse. Ebenso andersherum: wird Energie freigesetzt (wie bei der Kernspaltung), dann kann eine Masseabnahme beobachtet werden. Die allgemeine *Relativitätstheorie* erweitert die spezielle vor allem durch das Konzept der Krümmung. Diese ermöglicht die gesamte Raumzeit und damit auch das gesamte Universum ↪ zu betrachten. Energie verursacht die Krümmung der Raumzeit und durch sie entsteht die Gravitation. Diese wird also nicht mehr als eine Kraft beschrieben, die Objekte anzieht, sondern kommt allein durch die Geometrie der Raumzeit zustande. Hier kommt die Mathematik ins Spiel. Um die vierdimensionale Raumzeit mit der Krümmung und auch die Abstände und Linien auf denen sich Objekte in ihr bewegen zu beschreiben, kann nicht mehr die euklidische ↪ Geometrie benutzt werden. Es ist z.B. klar, dass ein Dreieck auf einer gekrümmten Oberfläche (wir stellen uns ein Dreieck vor, das auf die Erdkugel gezeichnet ist), nicht mehr die Winkelsumme von 180° haben kann. Hier hilft die so genannte Differentialgeometrie weiter, die Einstein ↪ mit der Unterstützung von Marcel Grossmann wiederentdeckte. Die Theorie der Schwarzen Löcher ist ebenfalls eine Folgerung der *Relativitätstheorie*. Ihre Gravitation ist so stark, dass alles, sogar das Licht, in ihnen verschwindet. Ein weiterer wichtiger Begriff sind die Gravitationswellen. Sie entstehen bei der Beschleunigung von Masse und sind lokale Änderungen der Form der Raumzeit (z.B. Stauchungen und Streckungen), die sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Gravitationswellen wurden erstmals direkt im Jahr 2015 nachgewiesen.

Satz des Pythagoras

Wer kennt ihn nicht, den berühmten *Satz des Pythagoras*? $a^2 + b^2 = c^2$. Man kann in einem rechtwinkligen Dreieck also mit Hilfe der Längen der zwei Katheten (die Seiten, die am rechten Winkel anliegen) a und b die Länge der Hypotenuse (die Seite gegenüber des rechten Winkels) c berechnen. Ebenso gilt die Umkehraussage des Satzes, d.h., wenn in einem Dreieck $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, dann ist dieses Dreieck rechtwinklig. Ganze Zahlen für die die Gleichung gilt, nennt man pythagoreisches Tripel ↪. Obwohl der Satz nach Pythagoras von Samos ↪ benannt ist, ist die Forschung sich einig, dass der Satz schon vor ihm (z.B. in Babylon, Indien und China) bekannt war. Bis heute streitet man sich aber darüber, ob Pythagoras ↪ als erster den Satz bewiesen hat oder überhaupt keine Rolle beim Beweis des Satzes gespielt hat und ob er ihn selbst entdeckt oder von den Babyloniern ↪ übernommen hat.

Schaltjahr

Das *Schaltjahr* dient dazu, dass unser Kalenderjahr mit der Zeit, die die Erde braucht, um einmal die Sonne zu umrunden, übereinstimmt. Tatsächlich braucht die Erde nicht 365 Tage, um die Sonne einmal zu umrunden, sondern 365,242199 Tage (365 Tage, 5 Stunden, 48 Minuten und 46 Sekunden). Da man ein Jahr im Kalender aber nicht so genau festlegen kann, fügt man alle vier Jahre einen Tag im Jahr (im *Schaltjahr*) dazu und kommt dann im Durchschnitt in etwa auf die richtige Zahl an Tagen. Im gregorianischen Kalender (der weltweit am häufigsten benutzt wird), hat deshalb der Februar alle vier Jahre 29 statt 28 Tage und das Jahr somit 366 statt 365 Tage. In 400 Jahren entfallen aber drei dieser *Schaltjahre*, um das Ergebnis noch genauer zu machen. Mit dieser Regelung kommt man auf einen Durchschnitt von 365,2425 Tagen.

Das Sieb des Eratosthenes

Mit Hilfe des *Sieb des Eratosthenes* kann man die Primzahlen bis zu einer (frei wählbaren) vorgegebenen Zahl bestimmen. Es handelt sich um einen Algorithmus ↪ der die Eigenschaft der Primzahlen ausnutzt, dass sie keine Teiler (außer 1 und sich selbst) haben. Man „siebt" dabei die Primzahlen (daher auch der Name) aus. Möchte ich z.B. alle Primzahlen bis 30 wissen, dann schreibe ich die Zahlen von 2 bis 30 in eine Tabelle. Die kleinste Zahl, also 2, ist immer eine Primzahl. Danach streiche ich alle Vielfachen von 2 (4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30), denn diese können ja keine Primzahlen sein, da sie durch 2 teilbar sind. Die jetzige kleinste Zahl (3) ist wieder eine Primzahl. Ich streiche wieder alle Vielfachen (9, 15, 21, 27), wobei ich nicht alle streichen muss, weil manche schon gestrichen wurden, da sie auch Vielfache von 2 sind. Nun kommt die 5 usw., solange bis nur noch die Primzahlen (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29) übrig bleiben.

Sonnensystem

Zu unserem *Sonnensystem* gehören natürlich die Sonne, als Zentrum, und die acht Planeten, die um sie kreisen. Dazu kommt aber noch alles, was von der Gravitationskraft der Sonne angezogen wird. Das sind z.B. Zwergplaneten, Asteroiden, Meteoroiden, aber auch Staub und Gasteilchen. Der Stern Sonne ist sozusagen der Angelpunkt des Systems mit der größten Masse (99,86%). Er hat sich vor allen Planeten gebildet. Die Reihenfolge der Planeten (bzgl. der Entfernung zur Sonne) kann man sich durch einen einfachen Merkspruch verinnerlichen:

***M**ein **V**ater **e**rklärt **m**ir **j**eden **S**onntag **u**nseren **N**achthimmel.*

Merkur* – *Venus* – *Erde* – *Mars* – *Jupiter* – *Saturn* – *Uranus* – *Neptun

Die Erde ist etwa 149.600.000km von der Sonne entfernt. Diesen Wert hat man auf 1 Astronomische Einheit (*AE*) festgelegt. Der Merkur ist am nächsten zur Sonne (0.39 *AE*) und der Neptun am weitesten entfernt (30,1 *AE*). Zudem unterteilt man die Planeten in innere (Merkur, Venus, Erde, Mars) und äußere Planeten. Zwischen ihnen liegt ein Asteroidengürtel. Die äußeren Planeten haben andere Eigenschaften als die inneren, z.B. bestehen sie größtenteils aus Gas, während die inneren eine erdähnliche Oberfläche haben. Nach den äußeren Planeten kommt der sogenannte Kuipergürtel, der hauptsächlich aus Zwergplaneten besteht, und die Oortsche Wolke (100.000 *AE*), für die es aber noch keinen Nachweis gibt. Bis heute ist noch nicht definiert, wo genau das *Sonnensystem* endet. In unserer Galaxie, der Milchstraße, gibt es noch weitere *Sonnensysteme*. Der Stern, der der Sonne am nächsten ist, heißt Proxima Centauri. 2016 fand man heraus, dass er von einem Planeten umkreist wird, der sich in einer habitablen Zone wie die Erde befindet. Die Entstehung unseres *Sonnensystems* könnte durch eine Supernova verursacht worden sein, die zu einem Sternhaufen führte, aus dem sich dann letztlich unsere Sonne herausbildete.

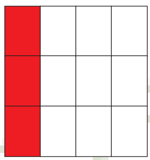
Spalten

In einer Tabelle oder Matrix gibt es Zeilen↪ und *Spalten*. Die senkrecht (vertikal) untereinanderstehenden Einträge ergeben eine *Spalte*.

2. Spalte

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

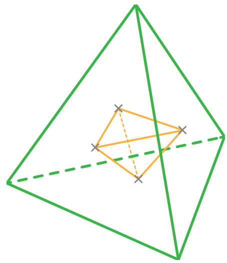
1. Spalte



Tetraeder

Ein *Tetraeder* ist ein geometrisches Objekt und einer der fünf platonischen Körper. Er besitzt vier Flächen (das Wort *Tetraeder* kommt aus dem Griechischen und bedeutet Vierflächner), hat vier Ecken↪ und sechs Kanten↪. Die Flächen sind gleichseitige Dreiecke. Der *Tetraeder* ist konvex↪ und wenn man die Mittelpunkte seiner Flächen verbindet erhält man wieder einen *Tetraeder*. Anwendung findet er z.B. in der

Chemie, wo man mit seiner Hilfe die räumliche Anordnung von Atomen beschreiben kann oder als Wellenbrecher, wobei in diesem Falle nicht der *Tetraeder* selbst verwendet wird, sondern so genannte Tetrapoden, die ausgehend von einem *Tetraeder* konstruiert werden können. In der Kristallographie können manche Gitternetze von Kristallen mit seiner Hilfe beschrieben werden. Auch wurde der Tetra Pak nach ihm benannt, da dessen ursprüngliche Form die eines *Tetraeders* war.



von Birgit Lachner, drawn with geocNext (de:Bild:Dualitaet des Tetraeders.png) [GFDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html) oder CCBYSA3.0 (http://creativecommons.org/licenses/bysa/3.0/)], via Wikimedia Commons.

Universum

Zum *Universum* gehört alles, was existiert: Planeten, Sterne (wie z.B. die Sonne), Galaxien (wie z.B. die Milchstraße, zu der auch die Erde gehört), Schwarze Löcher, Atome, … Allgemeiner formuliert ist das *Universum* alle Materie und Energie, der gesamte Raum und die Zeit. Es wird auch Kosmos oder Weltall genannt. Die Wissenschaft, die sich mit dem *Universum* beschäftigt heißt Kosmologie. Das Alter des *Universums* beträgt 13,81 ± 0,04 Milliarden Jahre. Man konnte das Alter des *Universums* dank dem Weltraumteleskop Planck so genau messen. Dieses Mikroskop misst die Hintergrundstrahlung, die Aussagen über die Expansion des *Universums* gibt. Somit können über die momentane Expansion Rückschlüsse auf frühere Zustände des *Universums* gezogen werden. Nach dem heutigen Stand der Wissenschaft ist die Urknalltheorie die Theorie über die Entstehung des *Universums*, die am wahrscheinlichsten ist. Mit dem Urknall sind also Zeit, Raum und Materie entstanden und unser *Universum* dehnt sich seither aus. Ob es außerhalb unseres *Universums* noch etwas gibt oder was vor dem Urknall war, darüber kann man keine Aussagen machen. Genau gesagt kann man über die ersten paar Sekunden des Urknalls (die so genannte Planck-Zeit) auch keine Aussage machen, da die naturwissenschaftlichen Gesetze, die zu diesem Zeitpunkt herrschten, niemandem bekannt sind.

Vier-Farben-Satz

Der *Vier-Farben-Satz* macht eine Aussage darüber, wie viele Farben man braucht, um eine Landkarte so einzufärben, dass alle Nachbarländer (also Länder mit einer gemeinsamen Grenze) nie dieselbe Farbe haben. Dabei ist jedes Land ein zusammenhängendes Gebiet. Wie der Name des Satzes schon vermuten lässt, braucht man dazu maximal vier Farben, egal wie viele Länder man auf seiner Karte gegeben hat. Statt einer Landkarte kann man sich auch einen Graphen vorstellen, wobei die Länder dann die Ecken ↪ des Graphen und die Grenzen die Kanten ↪ darstellen. Somit ist der *Vier-Farben-Satz* ein Problem der Graphentheorie. Nach einigen fehlerhaften Beweisen, wurde der Satz 1976 erstmals mit einem Computer bewiesen. Inzwischen existiert auch ein formaler Beweis, der aber trotzdem ein Computerprogramm als Hilfe verwendet und somit immer noch maschinengestützt ist. Der *Vier-Farben-Satz* ist der erste große Satz, der mit Hilfe eines Computers bewiesen wurde.

Wahrscheinlichkeitstheorie

Die *Wahrscheinlichkeitstheorie* ist ein Teilgebiet der Mathematik, das sich mit dem Zufall beschäftigt. Als Zufall verseht man das Eintreten von Ereignissen, die man nicht voraussagen kann. Ein Beispiel dafür ist das Würfeln eines sechsseitigen Würfels und das Ereignis eine Sechs zu würfeln. In der *Wahrscheinlichkeitstheorie* werden Ereignisse als Mengen verstanden. In diesem Falle wäre das die Menge $\{6\}$, die nur die Sechs enthält. Alle diese Mengen liegen in dem so genannten Ereignisraum, der alle möglichen Ereignisse enthält. Beim Würfeln mit einem Würfel ist der Ereignisraum die Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Von besonderem Interesse ist die Wahrscheinlichkeit mit der ein Ereignis eintritt. Wahrscheinlichkeit ist in der Mathematik ein abstrakter Begriff und wird als ein Wert zwischen Null und Eins (Null heißt etwas ist zu 0%, Eins etwas ist zu 100% wahrscheinlich) verstanden, dem man sich beliebig nähern kann, wenn man immer länger würfelt und die Anzahl der geworfenen Sechsen durch die gesamte Anzahl der Würfe teilt (Bernoulli ↪). Mathematisch wird die Wahrscheinlichkeit meist durch ein Wahrscheinlichkeitsmaß $P(.)$ ausgedrückt. Dieses Wahrscheinlichkeitsmaß drückt aus wie wahrscheinlich ein Ereignis ist. Zum Beispiel würde für das Würfelbeispiel gelten $P(\{6\}) = 1/6$ und $P(\{5, 6\}) = 1/3$.

Wegzusammenhängend

Eine Menge, die *wegzusammenhängend* ist, klingt auf den ersten Blick sehr kompliziert. Doch tatsächlich ist das Konzept ganz einfach. In der Menge (man kann sie sich bildlich als eine geometrische Figur oder auch einfach nur als einen Klecks vorstellen), muss ich immer einen Weg zwischen zwei beliebigen Punkten finden, der die Menge nicht verlässt. Ich darf dabei keine Hüpfer oder Sprünge machen, meine Füße müssen die ganze Zeit die Menge berühren. Mathematisch formuliert heißt das, dass ich für zwei beliebige Punkte immer einen Weg finde, der den einen Punkt als Startpunkt hat und sich dann stetig (das heißt ohne abzusetzen) bis zum anderen Punkt zeichnen lässt. Der Donut ist zwar nicht konvex ↪, aber *wegzusammenhängend*. Ich kann den Weg zwischen zwei Punkten ja einfach um das Loch herum zeichnen, denn ich muss nicht den kürzesten Weg wählen. Der Buchstabe „i" wäre nicht *wegzusammenhängend*, da es vom i-Punkt zum Strich keinen Weg gibt.

Wurzel

Die *Wurzel* ist sozusagen das Gegenteil der Potenz ↪ und das Wurzelziehen ist das Gegenteil (man sagt auch die Umkehrfunktion) des Potenzierens. Wenn man also die *Wurzel* von einer Zahl zieht, dann muss das Ergebnis, wenn man es quadriert, wieder die Zahl selbst ergeben. Andersherum kommt man wieder auf dieselbe Zahl, wenn man diese zuerst quadriert und dann die *Wurzel* zieht. Man kann auch die dritte, vierte, fünfte, … *Wurzel* einer Zahl ziehen. Dann ist das das Gegenteil der dritten, vierten, fünften, … Potenz ↪.

Bsp.: $\sqrt{16} = 4 \Rightarrow 4^2 = 16$

$2^3 = 8 \Rightarrow \sqrt[3]{8} = 2$

Zehnersystem

Das *Zehnersystem* ist das Zahlensystem, das uns am vertrautesten ist und das wir tagtäglich benutzen. Entwickelt wurde es aber nicht in Europa, sondern in Indien, von wo aus es durch die Araber im 9. Jhdt. in die westliche Welt gelangte. Es brauchte aber noch einige Jahrhunderte bis es sich hier etablierte. Das *Zehnersystem* (auch Dezimalsystem) beruht auf der Basis 10, d.h. alle Zahlen lassen sich mit Hilfe von Zehnerpotenzen beschreiben und es existieren nur die Ziffern von 0 bis 9. Die Position einer Ziffer gibt auch ihren Stellenwert wieder. Sie kann z.B. an der 100*er* oder an der 10*er* Stelle stehen.

Bsp.: $534 = 5 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 1 = 5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$

$17 = 1 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$

Man kann auch Dezimalzahlen durch eine Summe mit Zehnerpotenzen darstellen. Dafür braucht man für die Stellen nach dem Komma negative Exponenten.

Bsp.: $12{,}34 = 1 \cdot 10 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{100} = 1 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2}$

$271{,}828 = 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-3}$

Das *Zehnersystem* ist eine Möglichkeit, um Zahlen darzustellen und mit ihnen zu rechnen. Es gibt aber noch viele andere Möglichkeiten, wie z.B. das [Binärsystem] oder das System der [Babylonier], das die Basis 60 hat.

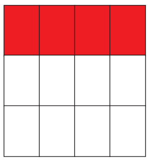
Zeilen

In einer Tabelle oder Matrix gibt es *Zeilen* und Spalten ↪. Die waagrecht (horizontal) nebeneinanderstehenden Einträge ergeben eine *Zeile*.

2. Zeile

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Zeile



Zinsen

Eine Person, die einer anderen Person Geld leiht, nennt man Gläubiger. Der Gläubiger kann mit dem Schuldner vertraglich vereinbaren, dass er *Zinsen* auf das geliehene Kapital bekommt. Das heißt, wenn er das geliehene Geld zurückbekommt, erhält er mehr Geld zurück, als er verliehen hat. Leihe ich z.B. jemandem 50€ mit einem Zinssatz von 5% pro Jahr, dann würde ich nach einem Jahr die 50€ plus 5% von diesen 50€, also 52,50€, bekommen. Wenn man bei einer Bank Geld anlegt, erhält man auch oft *Zinsen*, da man der Bank das Geld auch leiht. Wie man an der Rechnung gesehen hat, bringt ein hoher Zinssatz dem Anleger mehr Geld.

Quellen

https://de.wikipedia.org/wiki/Archimedes#Mathematik
https://de.wikipedia.org/wiki/Jakob_I._Bernoulli
https://de.wikipedia.org/wiki/GeorgesLouis_Leclerc_de_Buffon
https://de.wikipedia.org/wiki/Ren%C3%A9_Descartes
https://de.wikipedia.org/wiki/Leonardo_da_Vinci
https://de.wikipedia.org/wiki/Thomas_Alva_Edison
https://de.wikipedia.org/wiki/Lampensockel#Edisonsockel
https://de.wikipedia.org/wiki/Kohlefadenlampe
https://de.wikipedia.org/wiki/Albert_Einstein
https://de.wikipedia.org/wiki/%C3%84quivalenz_von_Masse_und_Energie
https://de.wikipedia.org/wiki/Paul_Erd%C5%91s
https://de.wikipedia.org/wiki/Erd%C5%91sZahl
https://de.wikipedia.org/wiki/Das_Buch_der_Beweise
https://de.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler
https://de.wikipedia.org/wiki/Pierre_de_Fermat
https://de.wikipedia.org/wiki/Leonardo_Fibonacci
https://de.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gau%C3%9F
https://www.mpg.de/7585895/gehirn_gauss
https://de.wikipedia.org/wiki/David_Hilbert
https://de.wikipedia.org/wiki/Hilberts_Hotel
https://de.wikipedia.org/wiki/Hypatia
https://de.wikipedia.org/wiki/Katherine_Johnson
https://de.wikipedia.org/wiki/Maryam_Mirzakhani
https://www.zeit.de/wissen/201707/maryammirzakhanimathematikerinfieldsmedailletod
https://de.wikipedia.org/wiki/Emmy_Noether
https://de.wikipedia.org/wiki/Pythagoras
https://de.wikipedia.org/wiki/Adam_Ries
https://de.wikipedia.org/wiki/Sokrates
https://de.wikipedia.org/wiki/Voltaire
https://de.wikipedia.org/wiki/Kante_(Graphentheorie)
https://de.wikipedia.org/wiki/Maya
https://de.wikipedia.org/wiki/Marianengraben
https://de.wikipedia.org/wiki/Witjastief_1
38
https://de.wikipedia.org/wiki/Tetraeder
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/79/Duality_of_

tetrahedron.png
https://de.wikipedia.org/wiki/Parallelenaxiom
https://de.wikipedia.org/wiki/Zins
https://de.wikipedia.org/wiki/VierFarbenSatz
https://de.wikipedia.org/wiki/Universum
https://de.wikipedia.org/wiki/PlanckWeltraumteleskop
https://de.wikipedia.org/wiki/Hintergrundstrahlung
https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_des_Pythagoras
https://www.timeanddate.de/kalender/schaltjahr
https://de.wikipedia.org/wiki/Schaltjahr
https://de.wikipedia.org/wiki/Pythagoreisches_Tripel
https://de.wikipedia.org/wiki/Puszta
https://de.wikipedia.org/wiki/Hortob%C3%A1gyiNationalpark
https://de.wikipedia.org/wiki/MillenniumProbleme
https://de.wikipedia.org/wiki/Gau%C3%9Fsche_Osterformel
https://de.wikipedia.org/wiki/Fr%C3%BChlingsvollmond
https://de.wikipedia.org/wiki/Gro%C3%9Fer_Fermatscher_Satz
https://de.wikipedia.org/wiki/M%C3%B6biusband
https://de.wikipedia.org/wiki/Meridian_(Geographie)
https://de.wikipedia.org/wiki/Nullmeridian
https://de.wikipedia.org/wiki/Magisches_Quadrat
https://de.wikipedia.org/wiki/Liliputaner
https://de.wikipedia.org/wiki/Kleinwuchs
https://de.wikipedia.org/wiki/Geburtstagsparadoxon
https://de.wikipedia.org/wiki/Babylonier
https://de.wikipedia.org/wiki/Babylon#Sieben_Weltwunder
https://de.wikipedia.org/wiki/Babylonien
https://de.wikipedia.org/wiki/Babylonische_Mathematik
https://de.wikipedia.org/wiki/Blauwal
https://de.wikipedia.org/wiki/Buffonsches_Nadelproblem
https://de.wikipedia.org/wiki/FibonacciFolge
https://www.natuerlichonline.ch/magazin/artikel/derfibonaccicode/
https://de.wikipedia.org/wiki/Goldener_Schnitt#Algebraisch
39
https://de.wikipedia.org/wiki/Haus_vom_Nikolaus
https://de.wikipedia.org/wiki/Homo_rudolfensis
https://de.wikipedia.org/wiki/Irrationale_Zahl
https://de.wikipedia.org/wiki/Kartesisches_Koordinatensystem
https://de.wikipedia.org/wiki/Kartesisches_Produkt
https://de.wikipedia.org/wiki/Gau%C3%9Fsche_Summenformel

https://de.wikipedia.org/wiki/Konvexe_Menge
https://de.wikipedia.org/wiki/Kryptographie
https://de.wikipedia.org/wiki/Pascalsches_Dreieck
https://de.wikipedia.org/wiki/Kreiszahl
https://de.wikipedia.org/wiki/Pyramiden_von_Gizeh
http://www.aleph1.info/?call=Puc&permalink=analysis2_1_1_Z11
http://www.instmath.rwthaachen.de/Preprints/bemelmans20110116.pdf
https://de.wikipedia.org/wiki/Sieb_des_Eratosthenes
https://de.wikipedia.org/wiki/Sonnensystem
https://de.wikipedia.org/wiki/Zusammenh%C3%A4ngender_Raum#Wegzusammenh%C3%A4ngend
https://de.wikipedia.org/wiki/Dezimalsystem
https://de.wikipedia.org/wiki/Algebra
https://de.wikipedia.org/wiki/Relativit%C3%A4tstheorie
https://de.wikipedia.org/wiki/%C3%84quivalenz_von_Masse_und_Energie
https://de.wikipedia.org/wiki/Gravitationswelle
https://de.wikipedia.org/wiki/Raumzeit
https://de.wikipedia.org/wiki/Galileo_Galilei
https://de.wikipedia.org/wiki/Wilhelm_Schickard
https://wiki.yogavidya.de/Ganita
https://de.wikipedia.org/wiki/Indische_Mathematik
Alle Seiten zuletzt besucht am 1.12.2018.

Autorinnen: Prof. Dr. Carla Cederbaum, Anja Fetzer
Spielentwicklung: Prof. Dr. Carla Cederbaum, Dr. Elke Müller
Aufgabenerstellung: Prof. Dr. Carla Cederbaum, Anja Fetzer, Lea Lange, Dr. Elke Müller
Spieltest: Prof. Dr. Carla Cederbaum, Dr. Elke Müller, Stephanie Schiemann
Grafik und Design: Michael Féaux

Ganita wurde getestet in Kooperation mit der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

SEI KREATIV! 04

Um diese Karte zu gewinnen, löst diese Aufgabe:

Wieviele Spalten ↪ hat eine Tabelle mit 10 senkrechten Linien?

Lösung: 9

SEI KREATIV! 12

Um diese Karte zu gewinnen, findet eine Zahl, die diese Eigenschaften hat:

Die kleinste ganze Zahl, die auf Zehner gerundet 345000 ergibt

Lösung: 344995

SEI KREATIV! 07

Um diese Karte zu gewinnen, findet eine andere Darstellung für diese Zahl:

0.125

Beispiel: $\frac{1}{8}$ oder $\frac{3}{24}$

SEI KREATIV! 07

Um diese Karte zu gewinnen, findet eine andere Darstellung für diese Zahl:

$\frac{64}{8}$

Beispiel: 1000 im Binärsystem ↪

SEI KREATIV! 03

Um diese Karte zu gewinnen, findet eine Figur, die diese Eigenschaften hat:

Besitzt mindestens 4 Spiegelachsen

Beispiel: Quadrat, Kreis

SEI KREATIV! 03

Um diese Karte zu gewinnen, löst diese Aufgabe:

Wie viele Spiegelachsen hat ein Kreis?

Lösung: unendlich viele

SEI KREATIV! 16

Um diese Karte zu gewinnen, findet eine Zahl, die diese Eigenschaften hat:

Gerade, größer als 100, durch 3 teilbar

Beispiel: 102, 126, ...

SEI KREATIV! 05

Um diese Karte zu gewinnen, findet eine Zahl, die diese Eigenschaften hat:

Prim ↪, zweistellig, beginnt mit 1

Beispiel: 17. Jede andere Antwort müsst ihr nachrechnen.

SEI KREATIV! 05

Um diese Karte zu gewinnen, findet eine Zahl, die diese Eigenschaften hat:

Nicht prim ↪, beginnt nicht mit 1, gerade

Beispiel: 4. Jede andere Antwort müsst ihr nachrechnen.

SEI KREATIV! 07

Um diese Karte zu gewinnen, findet eine andere Darstellung für diese Zahl:

0.75

Beispiel: $\frac{3}{4}$ oder $\frac{6}{8}$

SEI KREATIV! 03

Um diese Karte zu gewinnen, findet eine Figur, die diese Eigenschaften hat:

Schwerpunkt = Schnittpunkt der Mittelsenkrechten

Beispiel: gleichseitiges Dreieck, Quadrat, Rechteck

SEI KREATIV! 07

Um diese Karte zu gewinnen, findet eine andere Darstellung für diese Zahl:

$\frac{1}{3}$

Beispiel: 0,333... oder $\frac{2}{6}$

SEI KREATIV! 05

Um diese Karte zu gewinnen, findet eine andere Darstellung für diese Zahl:

$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8$

Beispiel: 384

SEI KREATIV! 13

Um diese Karte zu gewinnen, findet eine andere Darstellung für diese Zahl:

100 in Binärdarstellung ↪

Beispiel: 4, $\frac{12}{3}$, ...

SEI KREATIV! 10

Um diese Karte zu gewinnen, findet eine andere Darstellung für diese Zahl:

XIV

Beispiel: 14, $\frac{28}{2}$, ...

SEI KREATIV! 16

Um diese Karte zu gewinnen, findet eine Zahl, die diese Eigenschaften hat:

Quersumme ↪ 9, letzte Ziffer ist eine 7

Beispiel: 27

SEI KREATIV! 13

Um diese Karte zu gewinnen, löst diese Aufgabe:

Welche Zahlen ergeben im Quadrat 16?

Lösung: 4 und -4

SEI KREATIV! 03

Um diese Karte zu gewinnen, findet eine Figur, die diese Eigenschaften hat:

Gleich viele Ecken ↪ wie Kanten ↪, mehr als 4 Ecken ↪

Beispiel: regelmäßiges Fünfeck, Sechseck, ...

SEI KREATIV! 05

Um diese Karte zu gewinnen, findet eine Zahl, die diese Eigenschaften hat:

Primzahl ↪, größer als 20, Quersumme 5

Beispiel: 23

SEI KREATIV! 03

Um diese Karte zu gewinnen, findet eine Figur, die diese Eigenschaften hat:

Hat gleich viele Seiten wie Ecken ↪, alle Seiten sind gleich-lang.

Beispiel: gleichseitiges Dreieck, Quadrat

SEI KREATIV! 05

Um diese Karte zu gewinnen, findet eine Zahl, die diese Eigenschaften hat:

Prim ↪, zweistellig, endet mit 1

Beispiel: 31. Jede andere Antwort müsst ihr nachrechnen.

SEI KREATIV! 10

Um diese Karte zu gewinnen, findet eine andere Darstellung für diese Zahl:

XXIII

Beispiel: 23, 46/2, …

SEI KREATIV! 03

Um diese Karte zu gewinnen, löst diese Aufgabe:

Wie viele Kanten ↪ hat ein 17-Eck?

Lösung: 17

SEI KREATIV! 03

Um diese Karte zu gewinnen, findet eine Figur, die diese Eigenschaften hat:

Hat einen kreisförmigen Rand und keine Löcher

Beispiel: Kreis

SEI KREATIV! 06

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Ein Mann wohnt im 24. Stockwerk. Er nimmt den Fahr-stuhl bis zum 17. Stockwerk und geht die restlichen 7 Stockwerke zu Fuß. Warum?

Lösung: Der Mann ist Liliputaner ↪.

SEI KREATIV! 06/12

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:

Was ist am schwersten?

a) 1 Kilo Blei
b) 1000 g Federn
c) 1 Kilo Holz

Lösung: Alles ist gleichschwer.

SEI KREATIV! 04

Um diese Karte zu gewinnen, …

… faltet ein Blatt Papier so oft du möchtest. Reiße eine der entstandenen Ecken ab, so dass genau drei Löcher im Blatt entstehen.

SEI KREATIV! 03

Um diese Karte zu gewinnen,…

…faltet ein DIN-A4-Blatt so, dass ein gleichseitiges Dreieck entsteht.

SEI KREATIV! 11

Um diese Karte zu gewinnen,…

…müsst ihr eine Rechenaufgabe (mit +, -, •, :) und den Zahlen 3, 5, 7 stellen, bei der das Ergebnis 8 herauskommt.

Lösung: 3 • 5 - 7

SEI KREATIV! 05

Um diese Karte zu gewinnen,…

…muss sich euer Team so aufstellen, dass die Anzahlen der Hände und Füße, die den Boden berühren Primzahlen ↪ sind.

Lösung: Primzahlen ↪ sind 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, …

SEI KREATIV! 02

Um diese Karte zu gewinnen,…

…findet einen Reim mit dem Namen deiner Spielfigur.

SEI KREATIV! 07

Um diese Karte zu gewinnen,…

…erstellt eine Aufgabe mit 2 Brüchen und löse sie.

Beispiel: $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$

SEI KREATIV! 13

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Warum ist (100 : 2) • 101 die Summe aller ganzen Zahlen von 1 bis 100?

Lösung: 50 Zahlenpaare ergeben immer zusammen 101 (1 + 100, 2 + 99, … , 50 + 51). Der kleine Gauß ↪

SEI KREATIV! 03

Um diese Karte zu gewinnen,…

…legt das Haus vom Nikolaus ↪ mit Geodreiecken.

SEI KREATIV! 03

Um diese Karte zu gewinnen,…

…malt 4 verschiedene geometrische Figuren.

SEI KREATIV! 03

Um diese Karte zu gewinnen,…

…faltet ein DIN-A4-Blatt zu einem Quadrat.

Sei Kreativ! 11

Um diese Karte zu gewinnen,…

…müsst ihr eine Rechenaufgabe (mit +, -, •, :) und den Zahlen 2, 8, 6 stellen, bei der das Ergebnis echt kleiner ↪ 8 ist.

Beispiel: 6 + 2 - 8

Sei Kreativ! 05

Um diese Karte zu gewinnen, findet eine Zahl, die diese Eigenschaften hat:

Prim ↪, ungerade, zweistellig, enthält eine 3

Beispiel: 23

Sei Kreativ! 03

Um diese Karte zu gewinnen, findet eine Figur, die diese Eigenschaften hat:

4 Ecken ↪, zwei parallele Seiten

Beispiel: Trapez

Sei Kreativ! 10

Um diese Karte zu gewinnen,…

…stellt die Zahl 13 ohne Ziffern dar.

Beispiel: XIII, dreizehn, …

Sei Kreativ! 11

Um diese Karte zu gewinnen,…

…müsst ihr eine Rechenaufgabe (mit +, -, •, :) und den Zahlen 2, 4, 6 stellen, bei der das Ergebnis 5 ist.

Lösung: (4 + 6) : 2

Sei Kreativ! 13

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Was könnte eine Gegenzahl (Inverses ↪) sein?

Lösung: Bei der Addition ist das Inverse ↪ zu 5 die Zahl -5, da 5 + (-5) = 0. Also immer die zwei Zahlen, die addiert 0 ergeben.
Bei der Multiplikation ist das Inverse ↪ zu 5 die Zahl ⅕, da 5 • ⅕ = 1. Also immer die zwei Zahlen, die multipliziert 1 ergeben.

Sei Kreativ! 16

Um diese Karte zu gewinnnen, findet eine Zahl, die diese Eigenschaften hat:

Sie liegt zwischen 10.000 und 100.000, ist durch 2 und 5 teilbar und die Quersumme ↪ beträgt 9.

Beispiel: 50400

Sei Kreativ! 12

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

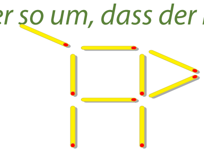
Was haben 1 m und 1000 mm gemeinsam?

Lösung: die Länge

Sei Kreativ! 04/06

Um diese Karte zu gewinnen, löst folgende Aufgabe:

Lege 2 Streichhölzer so um, dass der Hund in die andere Richtung schaut.



SEI KREATIV! 11

Um diese Karte zu gewinnen,…

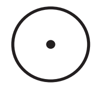
…müsst ihr eine Rechenaufgabe (mit +, -, •, :) und den Zahlen 3, 5, 7 stellen, bei der das Ergebnis echt kleiner↪ 10 ist.

Beispiel: 3 • 5 - 7 = 8

SEI KREATIV! 06

Um diese Karte zu gewinnen, löst folgende Aufgabe:

Zeichnet auf einem Blatt folgendes, ohne den Stift abzusetzen:



Lösung: Falte eine Ecke des Blattes, zeichne den Punkt und von dort aus eine Linie über die gefaltete Seite. Dann kannst du den Kreis zeichnen und das Blatt wieder zurückfalten.

SEI KREATIV! 03

Um diese Karte zu gewinnen,…

…formt mit drei Leuten ein Quadrat.

SEI KREATIV! 08/13

Um diese Karte zu gewinnen, schätzt die Antwort auf folgende Frage:

Wie viele Farben werden benötigt, um eine Landkarte so einzufärben, dass keine benachbarten Felder dieselbe Farbe haben?

Lösung: 4. Alle Antworte zwischen 3 und 5 sind eine gute Schätzung. Vier-Farben-Satz↪

SEI KREATIV! 13

Um diese Karte zu gewinnnen,…

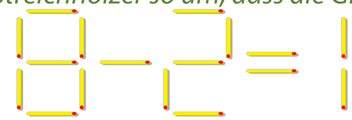
…bastelt ein Band aus Papier, wo man Innen- und Außenseite nicht unterscheiden kann.

Lösung: Das Möbius-Band↪

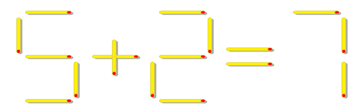
SEI KREATIV! 06

Um diese Karte zu gewinnen, löst folgende Aufgabe:

Lege genau 2 Streichhölzer so um, dass die Gleichung stimmt:



Lösung:



SEI KREATIV! 05

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Was sind Primzahl↪zwillinge?

Lösung: Zwei Primzahlen↪ zwischen denen nur eine ganze Zahl liegt. Also zum Beispiel 3 und 5, 11 und 13, … Ob es unendlich viele solcher Primzahl↪zwillinge gibt, konnte man bis heute noch nicht herausfinden.

SEI KREATIV! 15

Um diese Karte zu gewinnen,…

…denkt euch eine aufsteigende oder absteigende Kette von rationalen Zahlen aus.
Die Kette muss mindestens 5 Glieder haben.

Beispiel: ½ > ¼ > ⅛ > 1⁄16 > 1⁄32

SEI KREATIV! 11/13

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Was ergibt 2^0?

Tipp: $2^3 = 8$, $2^2 = 4$, $2^1 = 2$. Überlege dir wie du zur niedrigeren Potenz↪ gelangst.

Lösung: 1. Man teilt immer durch 2.

SEI KREATIV! 11/13

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Was ergibt 2^{-1}?

Tipp: $2^3 = 8$, $2^2 = 4$, $2^1 = 2$. Überlege dir wie du zur niedrigeren Potenz ↪ gelangst.

Lösung: ½. Man teilt immer durch 2.

SEI KREATIV! 11

Um diese Karte zu gewinnen, löst folgende Aufgabe:

Versucht diese Rechnung zu vereinfachen:

$$3 \cdot 4 + 3 \cdot 7$$

Lösung: $3 \cdot (4 + 7)$ (Distributivgesetz)

SEI KREATIV! 13

Um diese Karte zu gewinnen, …

…findet einen Trick, um $1 + 2 + 3 + \ldots + 9 + 10$ schnell auszurechnen.

Lösung: $5 \cdot 10 + 5$ oder $5 \cdot 11$. Der kleine Gauß ↪

SEI KREATIV! 06

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Warum hat der Eisberg die Titanic so unerwartet getroffen?

Lösung: Weil $\frac{9}{10}$ des Eisbergs sich unter Wasser befindet.

SEI KREATIV! 06

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Ein Orchester mit 33 Musikern spielt „Die kleine Nachtmusik" in 2 Minuten. Wie lange braucht ein Orchester mit 99 Musiker für dasselbe Stück?

Lösung: 2 min

SEI KREATIV! 08/13

Um diese Karte zu gewinnen, schätzt die Antwort auf folgende Frage:

Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es das Haus vom Nikolaus ↪ zu zeichnen?

Lösung: 88. Alle Antworten zwischen 75 und 100 sind eine gute Schätzung.

SEI KREATIV! 04/13

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Von welchen Ecken aus kann man das Haus vom Nikolaus ↪ zeichnen ohne den Stift abzusetzen?

Lösung: Von den beiden unteren Ecken aus.

SEI KREATIV! 03/04/13

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage (richtig) mit „ja" oder „nein":

Kann ich von jedem Punkt aus in einem Tetraeder ↪ zu einem beliebigen anderen Punkt gelangen und dabei immer innerhalb des Tetraeders ↪ bleiben? Ich will dabei den kürzesten Weg nehmen.

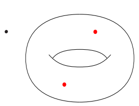
Lösung: Ja. Der Tetraeder ↪ ist konvex ↪.

SEI KREATIV! 03/04/13

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage (richtig) mit „ja" oder „nein":

Kann ich von jedem Punkt aus in einem Donut zu einem beliebigen anderen Punkt gelangen und dabei immer innerhalb des Donuts bleiben? Ich will dabei den kürzesten Weg nehmen.

Lösung: Nein. Der Donut ist nicht konvex ↪.



SEI KREATIV! 04/13

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage (richtig) mit „ja“ oder „nein“:

Komme ich in einem See mit vielen Inseln von einem beliebigen Punkt zu einem anderen beliebigen Punkt, ohne das Wasser verlassen zu müssen?

Lösung: Ja. Der See ist trotz der Inseln wegzusammenhängend ↪.

SEI KREATIV! 04/13

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage (richtig) mit „ja“ oder „nein“:

Kann ich durch Indonesien reisen, ohne festen Boden zu verlassen?

Lösung: Nein, denn Indonesien besteht aus vielen kleinen Inseln. Indonesien ist nicht wegzusammenhängend ↪.

SEI KREATIV! 03/04/13

Um diese Karte zu gewinnen,…

…zeichnet einen konvexen ↪ Körper.

SEI KREATIV! 03/04/13

Um diese Karte zu gewinnen,…

…zeichnet einen Körper, der nicht konvex ↪ ist.

SEI KREATIV! 04/13

Um diese Karte zu gewinnen,…

…zeichnet eine Menge, die wegzusammenhängend ↪ ist.

SEI KREATIV! 04/13

Um diese Karte zu gewinnen,…

…zeichnet eine Menge, die nicht wegzusammenhängend ↪ ist.

SEI KREATIV! 04/13

Um diese Karte zu gewinnen, bewertet diese Aussage (richtig) mit „wahr“ oder „falsch“:

Ich kann jede Parabel zeichnen, ohne den Stift abzusetzen.

Lösung: Wahr

SEI KREATIV! 03

Um diese Karte zu gewinnen, bewertet diese Aussage (richtig) mit „wahr“ oder „falsch“:

Zwei Kreise haben entweder 2 Schnittpunkte oder keinen Schnittpunkt.

Lösung: Falsch, sie können sich auch in einem Punkt berühren.

SEI KREATIV! 16

Um diese Karte zu gewinnen, bewertet diese Aussage (richtig) mit „wahr“ oder „falsch“:

Es gibt genau eine Zahl, die durch 0 teilbar ist.

Lösung: Wahr, die 0 selbst.

Sei Kreativ! 04/15

Um diese Karte zu gewinnen,…

…denkt euch eine Methode bzw. Darstellung der rationalen Zahlen aus, mit der du alle rationalen Zahlen abzählen kannst.

Beispiel: In die erste Zeile schreibt man alle Brüche mit einer 1 im Zähler, der Nenner läuft alle Zahlen durch (1,2,3,…). In die zweite Zeile schreibt man alle Brüche mit einer 2 im Zähler, der Nenner läuft ebenfalls. In der dritten Zeile steht die 3 im Zähler, usw.

Sei Kreativ! 14

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

In Deutschland sind die Frauen im Durchschnitt 165,9 cm groß. Ist es wahrscheinlich, eine 2 m große Frau auf der Straße (in Deutschland) zu treffen?

Lösung: Nein, denn die Abweichung ist zu groß.

Sei Kreativ! 14

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

In Osttimor sind die Männer im Durchschnitt 159,8 cm groß. Ist es wahrscheinlich, einen 158 cm großen Mann auf der Straße (in Osttimor) zu treffen?

Lösung: Ja, denn die Abweichung ist gering.

WIE WAR ES WIRKLICH? 02

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Fortsetzung dieser Geschichte:

Die Mathematikerin Sofja Kowalewskaya ↪ durfte in Russland nicht an der Uni arbeiten. Statt dessen…
a) …bekam sie 4 Kinder.
b) …ging sie nach Schweden.
c) …wurde sie Lehrerin.
d) …behauptete sie, ein Mann zu sein.

Lösung: b)

WIE WAR ES WIRKLICH? 01

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:

Wie heißt das am zweithäufigsten übersetzte und gedruckte Buch des Abendlandes?
a) Harry Potter und der Stein der Weisen
b) Asterix bei den Römern
c) Das Dschungelbuch
d) Euklids „Elemente" ↪

Lösung: Nach der christlichen Bibel wurde das Mathematikbuch von Euklid ↪ am Häufigsten gedruckt und übersetzt.

WIE WAR ES WIRKLICH? 01

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:

Wo wurde ein mathematischer Beweis verarbeitet?

a) In einem Musical
b) In einer Oper
c) In einem Computerspiel

Lösung: a) Das Musical heißt „Fermats ↪ letzter Tango".

WIE WAR ES WIRKLICH? 01

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:

Welches sind die ältesten schriftlichen Aufzeichnungen zur Mathematik?
a) Bronzezeitliche Felsritzungen
b) Die Tagebücher des Euklid ↪
c) „Die Quadratur der Parabel" ↪ von Archimedes ↪
d) Papyrustexte aus dem alten Ägypten

Lösung: d) Zwei Papyri aus dem 2. Jahrtausend v. Chr. sind die ältesten erhaltenen schriftlichen Aufzeichnungen mit mathematischen Berechnungen.

WIE WAR ES WIRKLICH? 01

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage Frage:

Wann wurde das Rechnen erfunden?

a) In der Altsteinzeit
b) Vor ca. 4000 Jahren
c) Um 500 v. Chr.
d) 1796

Lösung: a) Bereits in der Altsteinzeit, also vor 20.000 bis 30.000 Jahren, wurden erste Formen des elementaren Rechnens entwickelt.

WIE WAR ES WIRKLICH? 02

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Fortsetzung dieser Geschichte:

Der französische Mathematiker Évariste Galois ↪ starb im Duell um ein Mädchen. In der Nacht davor…
a) …aß er eine ganze Sahnetorte.
b) …berechnete er die Flugbahnen von Pistolenkugeln.
c) …heiratete er das Mädchen.
d) …vollendete er seine wichtigste mathematische Entdeckung.

Lösung: d) Galois ↪ hatte (zu Recht) Angst, den nächsten Tag nicht mehr zu erleben und seine Theorie dann nicht mehr vollenden zu können.

WIE WAR ES WIRKLICH? 01

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet diese Frage (richtig) mit „ja" oder „nein":

Haben die Menschen in Europa um Christi Geburt schon gewusst, dass 0 eine ganz normale Zahl ist?

Lösung: Nein, die Null kennt man erst seit etwa 800 nach Christi Geburt.

WIE WAR ES WIRKLICH? 02

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Fortsetzung dieser Geschichte:

Der französische Schriftsteller und Philosoph Voltaire ↪ gewann die Staatslotterie, weil…
a) …er mit dem Präsidenten befreundet war.
b) …er auf eine besondere Losnummer setzte.
c) …er alle Lose kaufte.
d) …er einfach Glück hatte.

Lösung: c) Die Lotteriebetreiber hatten sich verrechnet und Voltaire ↪ konnte trotz der Losgebühren Gewinn machen.

WIE WAR ES WIRKLICH? 02

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:

Wer hat die irrationalen Zahlen ↪ entdeckt?

a) Der Sohn von Euklid ↪
b) Carl Friedrich Gauß ↪
c) Ein Schüler von Pythagoras ↪
d) Sokrates ↪

Lösung: c) Der Schüler entdeckte, dass die Diagonale im Fünfeck mit Seitenlänge 1 keine rationale Länge haben kann. („irrational" ↪ heißt auch „unsinnig").

WIE WAR ES WIRKLICH? 10

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet diese Frage (richtig) mit „ja“ oder „nein“:

Gibt es Menschen, die Zahlen mit Gerüchen assoziieren (verbinden)?

Lösung: Ja, man nennt sie Synästhetiker. Andere verbinden Zahlen mit Geschmacksrichtungen oder Farben.

WIE WAR ES WIRKLICH? 10/11

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet diese Frage (richtig) mit „ja“ oder „nein“:

Gibt es einen Gerichtshof, der über die Rechengesetze wacht?

Lösung: Nein. Rechengesetze sind keine von Menschen erlassene (also ausgedachten) Gesetze, sie sind eher beobachtete Gesetzmäßigkeiten.

WIE WAR ES WIRKLICH? 01

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:

Wo wurden die arabischen Ziffern 1, 2, 3, ... entwickelt?

a) In Indien
b) In Arabien
c) In Ägypten
d) In Europa

Lösung: a) Die Ziffern heißen in Europa „arabische Ziffern“, weil sie von arabischen Gelehrten aus Indien nach Europa gebracht wurden.

WIE WAR ES WIRKLICH? 01

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Fortsetzung dieser Geschichte:

Im letzten Jahrhundert haben viele Mathematiker in ihrer Freizeit geforscht. Von Beruf waren sie oft…
a) …Ingenieure.
b) …Besserwisser.
c) …Architekten.
d) …Lehrer.

Lösung: d)

WIE WAR ES WIRKLICH? 10

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:

Was berechnet man mit der „Osterformel"↪ ?

a) Die Krümmung von Ostereiern
b) Das Osterdatum
c) Die größtmögliche Anzahl von Osterhasen
d) Den kürzesten Weg zum Osternest

Lösung: b) Mit der Osterformel↪ von Carl-Friedrich Gauß↪ kann das Datum des Ostersonntags berechnet werden.

WIE WAR ES WIRKLICH? 01

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet diese Frage (richtig) mit „ja“ oder „nein“:

Haben die Araber die arabischen Zahlen erfunden?

Lösung: Nein. Sie haben sie nur aus Indien nach Europa gebracht.

WIE WAR ES WIRKLICH? 02

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Fortsetzung dieser Geschichte:

Der ungarische Mathematiker Paul Erdös↪ liebte schöne Beweise. Er wohnte…
a) …überall und nirgendwo.
b) …in einer einsamen Jagdhütte.
c) …in der Puszta↪.
d) …bei seiner Mutter.

Lösung: a) Erdös↪ wollte immer dort sein, wo gerade interessante Mathematik entwickelt wurde. Daher wohnte er immer bei anderen Mathematikern.

WIE WAR ES WIRKLICH? 02

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:

Welcher dieser Mathematiker hat als Astronom in einer Sternwarte sein Brot verdient?
a) Carl Friedrich Gauß↪
b) David Hilbert↪
c) Albert Einstein↪
d) Nils Holgersson

Lösung: a)

WIE WAR ES WIRKLICH? 10

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Fortsetzung dieser Geschichte:

Alle Welt glaubt, Spinat hätte viel Eisen. Aber Wissenschaftler…
a) …haben sich bei den Einheiten vertan.
b) …haben das Komma an die falsche Stelle gesetzt.
c) …haben falsch gerundet.
d) …haben falsch gemessen.

Lösung: b)

Wie war es wirklich? 02

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:
Wer erfand/entdeckte die Null?

a) Fibonacci ↪ im Jahr 1202
b) Euklid ↪ um 300 v. Chr.
c) Die Babylonier ↪ im 5. Jahrhundert v. Chr.
d) Die Mayas ↪ im Jahr 36. v. Chr.

Lösung: c)

Wie war es wirklich? 10

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Wer konnte Zahlen wie MMXVIII flüssig lesen?

Lösung: Die Römer.

Wie war es wirklich? 10

Um diese Karte zu gewinnen, löst folgende Aufgabe:

Was bedeutet die römische Zahl MCDX im Zehnersystem ↪ ?

Lösung: 1410 (1 • 1000 + (-1) • 100 + 1 • 500 + 1 • 10)

Wie war es wirklich? 02

Um diese Karte zu gewinnen,…

…nennt einen deutschen Mathematiker oder eine deutsche Mathematikerin.

Beispiel: Carl Friedrich Gauß ↪, David Hilbert ↪, Emmy Noether ↪, Georg Cantor, Bernhard Riemann, Johannes Kepler

Wie war es wirklich? 01

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:
Woher kommt das Wort Algebra ↪ ?

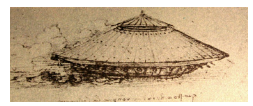
a) Von dem arabischen Wort al-ğabr
b) Von dem römischen Mathematiker Algebraicus
c) Alle gehen brav die Aufgabe an!

Lösung: a) al-ğabr bedeutet so viel wie „das Ergänzen", „das Zusammenfügen gebrochener Teile".

Wie war es wirklich? 02

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:
Leonardo da Vinci ↪ war Maler, Wissenschaftler und Astronom. Was erfand er, aber baute es nie?
a) Fernrohr
b) Leinwand
c) Panzer
d) Papier

Lösung: c)



Wie war es wirklich? 02

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:
Wofür ist der Mathematiker Buffon ↪ bekannt?
Er hat…
a) …Steine aus dem Fenster geworfen.
b) …Eier in Quadrate geworfen.
c) …Nadeln auf Linien geworfen.
d) …Münzen in Trichter geworfen.

Lösung: c) Das Buffonsche Nadelproblem ↪

Wie war es wirklich? 02

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:
Welches dieser Dinge erfand Albert Einstein ↪ ?

a) Das Benzin
b) Die Relativitätstheorie ↪
c) Die Quersumme ↪
d) Die Wahrscheinlichkeitstheorie ↪

Lösung: b)

Wie war es wirklich? 02/06

Um diese Karte zu gewinnen, bewertet diese Aussage (richtig) mit „wahr" oder „falsch":

Pythagoras ↪ hat seine Gleichungen innerhalb von 2 Minuten mit einem Taschenrechner überprüft.

Lösung: Falsch, Pythagoras ↪ hatte noch gar keinen Taschenrechner.

WIE WAR ES WIRKLICH? 02

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:

Unter welchem Namen wurde Leonardo von Pisa bekannt?
a) Herr Binomi
b) Fibonacci ↪
c) Ferrari
d) Bernoulli ↪

Lösung: b)

WIE WAR ES WIRKLICH? 01

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:

Wann und wo gab es die ersten Magische Quadrate ↪.

a) 4800 v. Chr. in Ägypten
b) 2800 v. Chr. Jahren in China
c) 1800 v. Chr. in Griechenland
d) 800 v. Chr. in Europa

Lösung: b)

WIE WAR ES WIRKLICH? 01

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage (richtig) mit „ja" oder „nein":

Gibt es einen Nobelpreis der Mathematik?

Lösung: Nein. Die Gründe dafür sind nicht nachgewiesen. Es existiert aber das Gerücht, dass Alfred Nobel in eine Frau verliebt war, die sich gegen ihn und für einen Mathematikprofessor entschieden hat und er aus Rache keinen Nobelpreis für Mathematik vergab. Dafür gibt es aber die Fields-Medaille und den Abel-Preis.

WIE WAR ES WIRKLICH? 01/08

Um diese Karte zu gewinnen, schätzt die Antwort auf diese Frage:

Wie lange hat es gebraucht, um den großen Fermatschen Satz ↪ zu beweisen?

Lösung: Etwa 350 Jahre. Alle Antworten zwischen 250 und 450 Jahren sind eine gute Schätzung.

WIE WAR ES WIRKLICH? 02

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:

Mit welchen Objekten hat sich Maryam Mirzakhani ↪ in ihrer mathematischen Forschung beschäftigt?
a) Stühlen
b) Billiardtischen
c) Dartscheiben
d) Fußballfeldern

Lösung: b)

WIE WAR ES WIRKLICH? 02

Um diese Karte zu gewinnen, bewertet diese Aussage (richtig) mit „wahr" oder „falsch":

Pythagoras ↪ war Gründer der religiös-philosophischen Bewegung der Pythagoreer.

Lösung: Wahr.

WIE WAR ES WIRKLICH? 02

Um diese Karte zu gewinnen, bewertet diese Aussage (richtig) mit „wahr" oder „falsch":

Pythagoras ↪ fand heraus, dass $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist, also nicht als Bruch geschrieben werden kann.

Lösung: Falsch. Sein Schüler Hippasos von Metapont fand dies heraus. Pythagoras ↪ selbst war davon überzeugt, dass jede Zahl als Bruch geschrieben werden kann.

WIE WAR ES WIRKLICH? 01

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:

Was ist das „Sieb Eratosthenes" ↪ ?

a) Ein besonders feines Sieb
b) Ein Verfahren zur Bestimmung von Primzahlen
c) Ein Verfahren zur Lösung von Gleichungen
d) Einer der ersten Rechenschieber

Lösung: b)

WIE WAR ES WIRKLICH? 01

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:

Die Fibonacci-Folge ↪ wurde von Leonardo von Pisa ↪ anhand
a) der Vermehrung von Kaninchen
b) einer Sonnenblume
c) einer Landkarte
konstruiert.

Lösung: a) Obwohl sich die Fibonacci-Folge ↪ durchaus in den Spiralen des Blütenstandes einer Sonnenblume findet.

WIE WAR ES WIRKLICH? 08

Um diese Karte zu gewinnen, schätzt die Antwort auf diese Frage:

Wie viel wog der erste Taschenrechner?

Lösung: 1,5 kg. Alle Antworten zwischen 1 kg und 2 kg sind eine gute Schätzung.

WIE WAR ES WIRKLICH? 13

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Wofür steht die Abkürzung q.e.d.?

Lösung: Quod erat demonstrandum (Was zu zeigen war). Alternativ kann man auch ein quadratisches Kästchen an das Ende eines Beweises zeichnen.

WIE WAR ES WIRKLICH? 01/03/08

Um diese Karte zu gewinnen, schätzt die Antwort auf diese Frage:

Wie viele Beweise des „Satz des Pythagoras"↪ sind bis heute bekannt?

Lösung: Über 400. Alle Antworten zwischen 300 und 500 sind eine gute Schätzung.

WIE WAR ES WIRKLICH? 01

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:

Adam Ries↪ war…

a) …ein deutscher Rechenmeister.
b) …ein Riese.
c) …eine Erfindung für den Spruch „Das macht nach Adam Riese…".

Lösung: a)

WIE WAR ES WIRKLICH? 01

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:

Die Zahl Pi↪ hat ihren eigenen inoffiziellen Feiertag, den Pi↪-Tag, nämlich am…
a) …28. Oktober (US-Schreibweise: 10/11).
b) …14. März (US-Schreibweise: 3/14).
c) …1. Januar (US-Schreibweise: 1/1).
d) …23. August (US-Schreibweise: 8/23).

Lösung: b), denn die Zahl Pi↪ beginnt mit 3,14…

WIE WAR ES WIRKLICH? 01

Um diese Karte zu gewinnen, bewertet diese Aussage (richtig) mit „wahr" oder „falsch":

1897 wollte man im Bundesstaat Indiana mathematische „Wahrheiten" per Gesetz festlegen.

Lösung: Wahr. Unter anderem wollte man Pi↪ auf den Wert 3,2 festlegen.

WIE WAR ES WIRKLICH? 01

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:

Das kartesische Koordinatensystem↪ wurde benannt nach…

a) …den Kartesern.
b) …dem kartesischen Produkt↪.
c) …nach René Descartes↪.

Lösung: c) Er gilt (womöglich zu Unrecht) als Erfinder des kartesischen Koordinatensystems↪.

WIE WAR ES WIRKLICH? 01

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:

„Nun werde ich weniger abgelenkt sein." Dieses Zitat stammt von Leonard Euler↪ nachdem…
a) …ihn seine Frau verlassen hat.
b) …er sein rechtes Auge verloren hat.
c) …er seinen Job verloren hat.
d) …sein Instagram-Account gesperrt wurde.

Lösung: b)

WIE WAR ES WIRKLICH? 02

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:

Wer sagte von sich selbst, dass er das Rechnen vor dem Sprechen gelernt habe?
a) Leonhard Euler↪
b) Albert Einstein↪
c) Emmy Noether↪
d) Carl Friedrich Gauß↪

Lösung: d)

WIE WAR ES WIRKLICH? 01

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:

Für das Lösen eines sogenannten „Millenium-Problems"↪ erhält man…
a) …ein 500 seitiges Mathematikbuch.
b) …die Fields-Medaille.
c) …1.000.000 Dollar.
d) …nichts.

Lösung: c)

WIE WAR ES WIRKLICH? 01

Um diese Karte zu gewinnen, bewertet diese Aussage (richtig) mit „wahr" oder „falsch":

Der „Satz des Pythagoras"↪ wurde von Pythagoras von Samos↪ gefunden.

Lösung: Falsch. Der Satz war den Babyloniern↪ schon 1000 Jahre vor Pythagoras↪ bekannt.

WIE WAR ES WIRKLICH? 05/13

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:

Bis heute wird nach immer noch größeren
a) Primzahlen↪
b) geraden Zahlen
c) komplexen Zahlen↪

gesucht.

Lösung: a) Große Primzahlen↪ spielen zum Beispiel bei der Verschlüsselung von Informationen (Kryptographie↪) eine große Rolle.

WIE WAR ES WIRKLICH? 02/10

Um diese Karte zu geiwnnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:

„Wer das Konzept der Unendlichkeit verstehen will, muss nur das Ausmaß menschlicher Dummheit betrachten." Dieses Zitat stammt von
a) Donald Trump
b) Voltaire↪
c) Aristoteles
d) Angela Merkel

Lösung: b)

WIE WAR ES WIRKLICH? 10/11

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:

Das Wort Potenz↪ kommt aus dem Lateinischen (potentia) und bedeutet
a) Multiplizieren
b) Hochzahl
c) Vermögen, Macht
d) Porzellan

Lösung: c)

WIE WAR ES WIRKLICH? 01

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:

Welche Zahl ist der Titel eines Hollywood-Films?

a) e
b) 1,05457180013 · 10-34
c) π↪
d) ∞

Lösung: c)

WIE WAR ES WIRKLICH? 01

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:

Woran scheiterte im 19. Jhdt. der Bau eine dampfbetriebenen „Computers"?
a) Der Erfinder starb
b) Das Geld reichte nicht
c) Der Bauplan wurde geklaut
d) Die Maschine explodierte

Lösung: b) Nach 10 Jahren Bauzeit musste der britische Ingenieur Charles Babbage 1833 die Arbeit an seiner dampfbetriebenen „Differenzmaschine" aufgeben, weil ihm das Geld ausging.

WIE WAR ES WIRKLICH? 01

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:

Wann und wo wurde die Bruchrechnung erfunden?

a) Um 1600 in Italien
b) 1789 in Paris
c) Vor 5000 Jahren in Ägypten
d) Vor 50 Jahren in Japan

Lösung: c) Bereits um 3000 v.Chr. rechneten die Ägypter mit Brüchen.

WIE WAR ES WIRKLICH? 02

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:

Was steht auf dem Grabstein von Archimedes↪?

a) Archimedes: ca. 287 - 212 v.Chr.
b) π↪ = 3,14159…
c) Gar nichts
d) Seine Formel zur Berechnung des Volumens einer Kugel

Lösung: d)
Der Legende nach steht die Formel $V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$↪ auf seinem Grabstein.

WIE WAR ES WIRKLICH? 02

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:
Wer erfand den ersten mechanischen Rechenautomaten?

a) Der deutsche Astronom und Mathematiker Wilhelm Schickard ↪ im 17. Jahrhundert
b) Albert Einstein ↪ im 20. Jahrhundert
c) Der italienische Astronom Galileo Galilei ↪ im 16. Jahrhundert
d) Der Schweizer Mathematiker Leonard Euler im 18. Jahrhundert

Lösung: a) Wilhelm Schickard ↪ konstruierte ca. 1623/24 den ersten mechanischen Rechenautomaten.

WIE WAR ES WIRKLICH? 01

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:
Wann wurde der erste mechanische Rechenautomat konstruiert?
a) 1922
b) Im 17. Jahrhundert
c) Im antiken Griechenland
d) In der Steinzeit

Lösung: b) Der deutsche Mathematiker Wilhelm Schickard ↪ konstruierte ca. 1623/24 den ersten mechanischen Rechenautomaten.

WIE WAR ES WIRKLICH? 01

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:
Die Buchführung im britischen Finanzministerium machte man früher mit…
a) …Tontäfelchen.
b) …Einkerbungen in Holzstäben.
c) …Feder, Tinte und Papier.
d) …Schiefertafel und Kreide.

Lösung: b) Die Buchhaltung mit „Kerbhölzern" wurde erst 1826 abgeschafft.

WIE WAR ES WIRKLICH? 01

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:
Mit welchen Hilfsmitteln rechneten die alten Ägypter?

a) Mit Knoten in Schnüren
b) Mit einem Taschenrechner aus Stein
c) Mit den Fingern
d) Mit Rechenmaschinen von Außerirdischen

Lösung: c) Die alten Ägypter rechneten mit den Fingern.

WIE WAR ES WIRKLICH? 01

Um diese Karte zu gewinnen, bewertet diese Aussage (richtig) mit „wahr" oder „falsch":

Die römischen Ziffern entstanden aus dem Alphabet.

Lösung: Falsch. Die ältesten römischen Ziffern I, V und X entstanden vor der Schrift.

WIE WAR ES WIRKLICH? 01

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:
Welche geometrische Form gilt als eins der sieben antiken Weltwunder?
a) Der Würfel von Rhodos
b) Die Pyramiden von Gizeh ↪
c) Der Tetraeder von Babylon
d) Die Kugeln von Ephesos

Lösung: b)

WIE WAR ES WIRKLICH? 01

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:
Vor dem Gebäude der Deutschen Bank in Frankfurt am Main steht eine Skulptur. Was ist dort zu sehen?
a) Karl Marx
b) Ein Möbiusband ↪
c) Eine überdimensionale 1 Euro-Münze
d) Eine Weltkugel

Lösung: b)

WIE WAR ES WIRKLICH? 02

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:
Seine mathematischen Entdeckungen schrieb Carl Friedrich Gauß ↪ …
a) …in seinen Computer.
b) …in sein „mathematisches Tagebuch".
c) …in sein Poesiealbum.
d) …in Spiegelschrift.

Lösung: b) Gauß ↪ führte ein „mathematisches Tagebuch", das 1898 entdeckt wurde.

WIE WAR ES WIRKLICH? 01

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:
Astronomen verloren den Planetoiden Ceres aus den Augen und fanden ihn wieder,…
a) …nachdem Carl Friedrich Gauß ↪ seine Umlaufbahn berechnet hatte.
b) …als 100 Jahre später schärfere Fernrohre auf den Markt kamen.
c) …als er im Jahr 2004 vom Weltraum-Teleskop Hubble fotographiert wurde.
d) …nachdem sich der interplanetarische Nebel verzogen hatte.

Lösung: a)

WIE WAR ES WIRKLICH? 02

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:

Wie hieß erste Frau, die die Fields-Medaille gewann?

a) Emmy Noether ↪
b) Maryam Mirzakhani ↪
c) Hypatia von Alexandria ↪
d) Miley Cyrus

Lösung: b)

WIE WAR ES WIRKLICH? 05

Um diese Karte zu gewinnen, bewertet diese Aussage (richtig) mit „wahr“ oder „falsch“:

Es existieren so genannte „Gute Primzahlen " ↪ .

Lösung: Wahr. Eine Primzahl ↪ heißt gut, wenn sie im Quadrat echt größer ↪ ist, als das Produkt der ersten Primzahl ↪ vor und der nach ihr, das der zweiten Primzahl ↪ vor und nach ihr, usw.

BEGREIFE DIE WELT! 08

Um diese Karte zu gewinnen, schätzt die Antwort auf diese Frage:

Wie hoch ist der höchste Berg der Welt?

Lösung: Der höchste Berg ist der Mount Everest, er ist 8848 m hoch. Alle Antworten zwischen 6 und 10 km sind eine gute Schätzung.

BEGREIFE DIE WELT! 08

Um diese Karte zu gewinnen, schätzt die Antwort auf diese Frage:

Wie weit sind der nördlichste und der südlichste Punkt Deutschlands voneinander entfernt? (Luftlinie)

Lösung: 873,8 km (die Halbinsel Ellenbogen auf Sylt im Norden, Haldenwanger Eck in Oberstdorf im Süden). Alle Antworten zwischen 750 km und 1000 km sind eine gute Schätzung.

BEGREIFE DIE WELT! 03

Um diese Karte zu gewinnen, nennt ein Beispiel aus dem Alltag, wo man diese mathematische Idee sinnvoll benutzen kann. Jeder vernünftige Vorschlag zählt!

Der Schwerpunkt im Dreieck.

Beispiel: Bei dreieckigen Café-Tischen mit nur einem Bein muss dieses unter dem Schwerpunkt sitzen, sonst fällt der Tisch um.

BEGREIFE DIE WELT! 08

Um diese Karte zu gewinne, schätzt die Antwort auf diese Frage:

Was ist der aktuelle Weltrekord (Stand 2018) bezüglich der Geschwindigkeit eines Zuges?

Lösung: Die Magnetbahn Maglev aus Japan erreichte am 21. April 2015 eine Geschwindigkeit von 603 km/h. Alle Antworten zwischen 500 und 700 km/h sind eine gute Schätzung.

BEGREIFE DIE WELT! 08

Um diese Karte zu gewinnen, schätzt die Antwort auf diese Frage:

Wie schnell fährt ein normaler Radfahrer im Stadtverkehr?

Lösung: 15-25 km/h

BEGREIFE DIE WELT! 03

Um diese Karte zu gewinnen, nennt ein Beispiel aus dem Alltag, wo man diese mathematische Idee sinnvoll benutzen kann. Jeder vernünftige Vorschlag zählt!

Der Mittelpunkt eines Kreises.

Beispiel: Zeigerbefestigung an einer Uhr

BEGREIFE DIE WELT! 08

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Wer ist schneller: ein Motorboot oder ein Elefant?

Lösung: Das Motorboot. Es schafft etwa 90 km/h, ein Elefant nur etwa 40 km/h.

BEGREIFE DIE WELT! 03

Um diese Karte zu gewinnen, nennt ein Beispiel aus dem Alltag, wo man diese mathematische Idee sinnvoll benutzen kann. Jeder vernünftige Vorschlag zählt!

Der Umfang eines Rechtecks.

Beispiel: Wenn man um eine Weide einen Zaun bauen möchte und wissen will, wie viel Elektroband man dafür braucht, muss man den Umfang der Weide kennen.

BEGREIFE DIE WELT! 06/13

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

3 Politiker treffen sich zu einer Konferenz. Jeder begrüßt jeden und von jedem Händeschütteln wird ein Foto gemacht.
Wie viele Fotos entstehen?

Lösung: 3 Fotos

BEGREIFE DIE WELT! 06/09

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Eine 126 mm lange Kerze brennt 5 Stunden lang. Danach ist sie 36 mm kürzer als vorher.
Wie lang müsste eine Kerze sein, die genau nach 5 Stunden bei gleicher Brenngeschwindigkeit abgebrannt ist?

Lösung: 36 mm

BEGREIFE DIE WELT! 08

Um diese Karte zu gewinnen, schätzt die Antwort auf diese Frage:

Wie tief ist die tiefste Stelle des Meeres?

Lösung: Die tiefste Stelle ist der Marianengraben ↪ im Pazifik. Er ist ca. 11 km tief. Alle Antworten zwischen 8 und 15 km sind eine gute Schätzung.

BEGREIFE DIE WELT! 10

Um diese Karte zu gewinnen, nennt...

...eine Größe aus der Welt des Sports, die in Prozent ausgedrückt wird.

Beispiel: Ballbesitz(zeit) im Fußball

BEGREIFE DIE WELT! 03

Um diese Karte zu gewinnen, nennt ein Beispiel aus dem Alltag, wo man diese mathematische Idee sinnvoll benutzen kann. Jeder vernünftige Vorschlag zählt!

Der rechte Winkel.

Beispiel: beim Bauen eines Tisches oder einer Ablage

BEGREIFE DIE WELT! 03

Um diese Karte zu gewinnen, nennt...

...ein ungefähr kreisförmiges Körperteil.

Beispiel: Pupille, Bauchnabel

BEGREIFE DIE WELT! 09/12

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Ein leeres Glas Honig wiegt 85 g. In das Glas werden nun 500 g Honig gefüllt.
Wie schwer ist das Glas mit Honig in kg?

Lösung: 0,585 kg.

BEGREIFE DIE WELT! 15

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Was sind schwarze und rote Zahlen?

Lösung: Guthaben und Schulden oder Gewinn und Verlust

BEGREIFE DIE WELT! 09/11

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

In der Aula der Schule fand eine Theatervorstellung statt. Es gab 20 Sitzreihen mit je 44 Sitzen. 54 Besucher fanden keinen Sitzplatz.
Wie viele Besucher kamen zu der Vorstellung?

Lösung: 934 Personen

BEGREIFE DIE WELT! 08

Um diese Karte zu gewinnen, schätzt die Antwort auf diese Frage:

Wie weit kann eine Weinbergschnecke innerhalb einer Stunde kriechen?

Lösung: Etwa 4,2 m. Alle Antworten zwischen 3 und 5 m sind eine gute Schätzung.

BEGREIFE DIE WELT! 08/10

Um diese Karte zu gewinnen, nennt...

...eine Entfernung im Weltraum, die größer als 100.000 km ist.

Beispiel: Der Abstand von Erde und Mond beträgt durchschnittlich 385.000 km.

BEGREIFE DIE WELT! 03

Um diese Karte zu gewinnen, nennt ein Beispiel aus dem Alltag, wo man diese mathematische Idee sinnvoll benutzen kann. Jeder vernünftige Vorschlag zählt!

Der Flächeninhalt eines Rechtecks.

Beispiel: Wenn man ausrechnen möchte, wie viel Farbe man braucht, um eine Wand zu streichen, muss man den Flächeninhalt der Wand kennen.

BEGREIFE DIE WELT! 09/12

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Ein Zug fährt um 8:21 Uhr in Saarbrücken ab und kommt nach 4 Stunden und 53 Minuten in Düsseldorf an.
Wie spät ist es dann?

Lösung: 13:14 Uhr

BEGREIFE DIE WELT! 09/11

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Eine Dose wiegt leer 670 g. Gefüllt mit Nägeln wiegt die Dose 1270 g. Ein Nagel wiegt ungefähr 4 g.
Wie viele Nägel sind in der Dose?

Lösung: 150 Nägel

BEGREIFE DIE WELT! 08

Um diese Karte zu gewinnen, schätzt die Antwort auf diese Frage:

Wie lange kocht man ein Ei weich?

Lösung: 3 - 7 min

BEGREIFE DIE WELT! 07

Um diese Karte zu gewinnen, nennt ein Beispiel aus dem Alltag, wo man diese mathematische Idee sinnvoll benutzen kann. Jeder vernünftige Vorschlag zählt!

Die Dezimalzahlen.

Beispiel: Preise, Größenangaben, ...

BEGREIFE DIE WELT! 08

Um diese Karte zu gewinnen, schätzt die Antwort auf diese Frage:

Wie viel Liter Wasser passen in eine normale Badewanne?

Lösung: 130 - 170 Liter

BEGREIFE DIE WELT! 08

Um diese Karte zu gewinnen, schätzt die Antwort auf diese Frage:

Wie viele Tage sitzt ihr in einem Schuljahr in der Schule?

Lösung: 245 - 275 Tage pro Schuljar

BEGREIFE DIE WELT! 15

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Auf Johannes' Grabstein steht: „Er lebte von 200 bis 145!"
Wie alt ist Johannes geworden?

Lösung: 55 Jahre alt

BEGREIFE DIE WELT! 12

Um diese Karte zu gewinnen, nennt ein Beispiel aus dem Alltag, wo man diese mathematische Idee sinnvoll benutzen kann. Jeder vernünftige Vorschlag zählt!

Runden

Beispiel: Die Höhe eines Berges

BEGREIFE DIE WELT! 12

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Anna radelt 15 Minuten 3 km weit. Wie weit ist sie nach einer Stunde gefahren?

Lösung: 12 km

BEGREIFE DIE WELT! 03

Um diese Karte zu gewinnen, nennt...

…drei Früchte oder Gemüsesorten, die (annähernd) kugelförmig sind.

Beispiel: Orange, Erbse, Tomate

BEGREIFE DIE WELT! 03

Um diese Karte zu gewinnen, nennt…

…drei Haushaltsgegenstände, die linienförmig sind.

Beispiel: Bleistift, Nadel, Besenstiel

BEGREIFE DIE WELT! 10

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Warum zeigen die Geschwindigkeitsanzeigen von deutschen und englischen Autos unterschiedliche Zahlen an, wenn die Autos gleich schnell fahren?

Lösung: Weil in England die Geschwindigkeit in Meilen pro Stunde (mph) gemessen wird und in Deutschland in Kilometer pro Stunde (km/h).

BEGREIFE DIE WELT! 11

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Olli ist 12 Jahre alt. Sein Vater ist 29 Jahre älter als Olli. Wie alt ist der Vater?

Lösung: 41 Jahre alt

BEGREIFE DIE WELT! 03

Um diese Karte zu gewinnen, nennt...

…zwei geometrische Figuren, die man an einem Fahrrad findet.

Beispiel: Kreise (Reifen, Zahnradkranz, Klingel), Dreiecke (Rahmen), Strecken (Speichen)

BEGREIFE DIE WELT! 10

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Was bedeutet 3% p.a. in einer Werbung für ein Konto bei einer Bank?

Lösung: Man bekommt auf diesem Konto 3% Zinsen ↪ im Jahr (p.a. = per annum, lateinisch).

BEGREIFE DIE WELT! 06/13

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

4 Politiker treffen sich zu einer Konferenz. Jeder begrüßt jeden und von jedem Händeschütteln wird ein Foto gemacht.
Wie viele Fotos entstehen?

Lösung: 6 Fotos

BEGREIFE DIE WELT! 08

Um diese Karte zu gewinnen, schätzt die Antwort auf diese Frage:

Wie lang ist ein Din A4 Papier?

Lösung: 29,7 cm, alle Anntworten zwischen 27 cm und 32 cm sind eine gute Schätzung.

BEGREIFE DIE WELT! 10

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:

Welche dieser Zahlen kann man runden?

a) die Bankleitzahl einer Bank
b) eine Telefonnummer
c) eine Postleitzahl

Lösung: Keine davon.

BEGREIFE DIE WELT! 09/11

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

In einen Öltank passen 3000 Liter Heizöl. Beim Auftanken werden genau 2458 Liter eingefüllt. Danach ist der Tank voll.
Wie viele Liter waren vor dem Tanken noch drin?

Lösung: 542 Liter

BEGREIFE DIE WELT! 03

Um diese Karte zu gewinnen, nennt...

…eine Pflanze, die annähernd eine gerade Linie ist.

Beispiel: Bambus, Schilfrohr

BEGREIFE DIE WELT! 09/11

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Marco macht eine Radtour. Er fährt jeden Tag durchschnittlich 56 km weit.
Wie weit fährt er in 7 Tagen?

Lösung: 392 km

BEGREIFE DIE WELT! 11

Um diese Karte zu gewinnen, nennt ein Beispiel aus dem Alltag, wo man diese mathematische Idee sinnvoll benutzen kann. Jeder vernünftige Vorschlag zählt!

Der Quotient ↪ zweier Zahlen

Beispiel: Beim Teilen mit Freunden und Familie.

BEGREIFE DIE WELT! 08

Um diese Karte zu gewinnen, schätzt die Antwort auf diese Frage:

Wie lang wächst dein Haar im Laufe eines Jahres?

Lösung: Etwa 12 cm. Alle Antworten zwischen 10 und 14 cm sind eine gute Schätzung.

BEGREIFE DIE WELT! 10

Um diese Karte zu gewinnen, nennt ein Beispiel aus dem Alltag, wo man diese mathematische Idee sinnvoll benutzen kann. Jeder vernünftige Vorschlag zählt!

Kann man nicht runden

Beispiel: eine Schuhgröße

BEGREIFE DIE WELT! 03

Um diese Karte zu gewinnen, nennt...

…eine geometrische Form, die am menschlichen Körper zu finden ist.

Beispiel: Kreis (Pupille, Bauchnabel), Winkel (Knie-, Ellenbogengelenk)

BEGREIFE DIE WELT! 09/11

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Ein Kreuzfahrtschiff hat Platz für 1820 Gäste. In jedes Rettungsboot passen 65 Passagiere. Wie viele Rettungsboote muss das Schiff haben, damit alle Gäste bei einem Unglück überleben?

Lösung: 28 Rettungsboote

BEGREIFE DIE WELT! 09/12

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Eine Sportlerin läuft täglich immer die gleiche Strecke. In einer Woche ist er insgesamt 8 h 45 min gelaufen. Wie lange braucht er durchschnittlich für seine Strecke?

Lösung: 1 h 15 min

BEGREIFE DIE WELT! 10

Um diese Karte zu gewinnnen, nennt…

…eine Sportart, bei der es auf Sekundenbruchteile ankommt.

Beispiel: Slalom (Ski und Snowboard), Hundertmeterlauf

BEGREIFE DIE WELT! 08

Um diese Karte zu gewinnen, schätzt die Antwort auf diese Frage:

Wie viele Quadratmeter hat euer Klassenzimmer?

Lösung: Klassenzimmer haben in der Regel 30-50 Quadratmeter.

BEGREIFE DIE WELT! 12

Um diese Karte zu gewinnen, nennt ein Beispiel aus dem Alltag, wo man diese mathematische Idee sinnvoll benutzen kann. Jeder vernünftige Vorschlag zählt!

Der Maßstab

Beispiel: Auf Zollstöcken, Maßbändern und Stadtplänen

BEGREIFE DIE WELT! 08

Um diese Karte zu gewinnen, schätzt die Antwort auf diese Frage:

Wie schwer ist ein ausgewachsener männlicher afrikanischer Elefant?

Lösung: Durchschnittlich 6 Tonnen = 6000 kg. Alle Antworten zwischen 5 t und 7 t sind eine gute Schätzung.

BEGREIFE DIE WELT! 08

Um diese Karte zu gewinnen, schätzt die Antwort auf diese Frage:

Wie hoch ist eine ausgewachsene Stieleiche?

Lösung: 20 - 40 m

BEGREIFE DIE WELT! 09/11

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Eine Fernsehzeitung, die 1x im Monat erscheint, kostet einzeln 2,40 €. Im Jahresabo kostet die Zeitung 25,80 €. Wie viel spart man insgesamt?

Lösung: 3 €

BEGREIFE DIE WELT! 09/11

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

In einer Straßenbahn sind 78 Personen. An der nächsten Haltestelle steigen 23 Personen aus und 44 Personen ein. Wieviele Leute sind nun in der Straßenbahn?

Lösung: 99 Leute

Begreife die Welt! 03

Um diese Karte zu gewinnen, nennt...

…drei geometrische Figuren, die als Straßenschilder verwendet werden.

Beispiel: Dreieck, Achteck, Kreis

Begreife die Welt! 03/08

Um diese Karte zu gewinnen, schätzt die Antwort auf diese Frage:

Wie groß ist der Radius der Erde?

Lösung: Etwa 6371 km. Alle Antworten zwischen 6000 und 7000 km sind eine gute Schätzung.

Begreife die Welt! 09/11

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Wie viel kostet der Zaun rund um ein rechteckiges Grundstück mit 30 m Länge und 20 m Breite, wenn 1m Zaun 23 € kostet? (und die Bauarbeiter leider das Eingangstor vergessen haben…)

Lösung: Zaunlänge: 2 • (20 m + 30 m) = 100 m.
Kosten: 100 • 23 € = 2300 €

Begreife die Welt! 08

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Wer ist schneller: ein ICE oder ein Gepard?

Lösung: Der ICE, er erreicht bis zu 400 km/h, der Gepard schafft nur 120 km/h.

Begreife die Welt! 09/11

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

6 Freunde wollen mit der Bahn verreisen. Einer besorgt die Fahrkarten für alle und bezahlt 828 €. Was kostet eine Fahrkarte?

Lösung: 138 €

Begreife die Welt! 07

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Zu Deinem Geburtstagsfest kommen 11 Gäste. Jeder von Euch möchte gleich viel von dem Geburtstagskuchen bekommen. Was musst Du tun?

Lösung: Den Kuchen in 12 Stücke teilen.
Oder: Jeder bekommt 1/12.

Begreife die Welt! 08

Um diese Karte zu gewinnen, schätzt die Antwort auf diese Frage:

Wie weit sind der östlichste und der westlichste Punkt Deutschlands voneinander entfernt? (Luftlinie)

Lösung: 632,51 km (Neißeaue bei Görlitz im Osten, Selfkant nahe Mönchengladbach im Westen). Jede Antwort zwischen 550 km und 700 km zählt als richtig geschätzt.

Begreife die Welt! 03

Um diese Karte zu gewinnen,…

…sucht im Raum eine quaderförmige Figur.

Begreife die Welt! 08

Um diese Karte zu gewinnen, schätzt die Antwort auf diese Frage:

Wie groß ist das größte Säugetier der Welt?

Lösung: Der Blauwal ↪ erreicht eine Länge von bis zu 33 m. Alle Antworten zwischen 25 m und 40 m sind eine gute Schätzung.

BEGREIFE DIE WELT! 08

Um diese Karte zu gewinnen, schätzt die Antwort auf diese Frage:

Wie lange gibt es das Universum ↪ ?

Lösung: Etwa 13,81 ± 0,04 Milliarden Jahre. Alle Antworten zwischen 10 und 16 Milliarden Jahren sind eine gute Schätzung.

BEGREIFE DIE WELT! 08

Um diese Karte zu gewinnen, schätzt die Antwort auf diese Frage:

Wie hoch ist die durchschnittliche Lebenserwartung in Deutschland?

Lösung: Männer: 77, 9 Jahre; Frauen: 82,9 Jahre (Daten von 2010-2015). Alle Antworten zwischen 70 und 90 Jahren sind eine gute Schätzung.

BEGREIFE DIE WELT! 08

Um diese Karte zu gewinnen, schätzt die Antwort auf diese Frage:

Wie hoch ist die durchschnittliche Lebenserwartung in Japan?

Lösung: Männer: 80 Jahre; Frauen: 86,4 Jahre (Daten von 2010-2015). Alle Antworten zwischen 73 und 93 Jahren sind eine gute Schätzung.

BEGREIFE DIE WELT! 08

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:

Wie groß ist der größte Pinguin?

a) 60 - 80 cm
b) kleiner als 60 cm
c) 1,20 m
d) 1,50 m

Lösung: Der Kaiserpinguin wird bis zu 1,20 m groß.

BEGREIFE DIE WELT! 08

Um diese Karte zu Karte zu gewinnen, schätzt die Antwort auf diese Frage:

Wie viele Knochen haben wir in unserem Körper?

Lösung: etwa 205 (die Anzahl der Kleinknochen in Fuß und Wirbelsäule kann variieren)

BEGREIFE DIE WELT! 10

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:

Du hast einen 5 €-Schein, eine 1 € und eine 2 € Münze. Welchen der folgenden Beträge kannst du nicht bezahlen ohne dein Geld zu wechseln:
a) 8 €
b) 7 €
c) 4 €
d) 5 €

Lösung: c)

BEGREIFE DIE WELT! 08

Um diese Karte zu gewinnen, schätzt die Antwort auf diese Frage:

Wie viele Einwohner hat Deutschland?

Lösung: 82,5 Millionen. Alles zwischen 70 und 90 Millionen ist eine gute Schätzung.

BEGREIFE DIE WELT! 11/12

Um diese Karte zu gewinnen, löst folgende Aufgabe:

Du baust einen 1,02 m hohen Turm aus 6 cm langen Bausteinen.
Wie viele Steine benötigst du?

Lösung: 102 : 6 = 17

BEGREIFE DIE WELT! 08

Um diese Karte zu gewinnen, schätzt die Antwort auf diese Frage:

Wie groß ist die Fläche von Europa?

Lösung: 10.180.000 km². Alle Antworten zwischen 9.000.000 und 11.000.000 km² sind eine gute Schätzung.

BEGREIFE DIE WELT! 07

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Wie lang dauert ein Fußballspiel tatsächlich, wenn 1/10 der Zeit wegen Verletzungen nicht gespielt wird?

Lösung: 81 min

BEGREIFE DIE WELT! 08

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:

Welche Entfernung (Luftlinie) ist größer?

a) Von München nach Berlin
b) Von München nach Kiel

Lösung: b) (a) 504,96 km, b) 695,12 km)

BEGREIFE DIE WELT! 08

Um diese Karte zu gewinnen, schätzt die Antwort auf diese Frage:

Wie lange sind die längsten Haare der Welt?

Lösung: 6,8 m (Tran Van Hay († 2010) aus Vietnam). Alle Antworten zwischen 6 m und 8 m sind eine gute Schätzung.

BEGREIFE DIE WELT! 07/10

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Warum sind Brüche im täglichen Leben wichtig? (Nenne 3 Gründe)

Beispiel: Kuchenaufteilung, Abmessen beim Backen, Farbe mischen

BEGREIFE DIE WELT! 08

Um diese Karte zu gewinnen, schätzt die Antwort auf diese Frage:

Wie lange schon gibt es die Menschen?

Lösung: Seit etwa 2 Millionen Jahren. Zu diesem Zeitpunkt entstand der sog. Urmensch (Homo rudolfensis ↪) in Ostafrika. Alle Antworten zwischen 1 und 3 Millionen Jahren sind eine gute Schätzung.

BEGREIFE DIE WELT! 10

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:

Was ist schwerer?

a) 1 Apfel
b) 1 Euro
c) 1 Socke

Lösung: a)

BEGREIFE DIE WELT! 08

Um diese Karte zu gewinne, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:

Welcher der Kontinente ist (bezüglich seiner Fläche) der kleinste?
a) Asien
b) Europa
c) Australien
d) Antarktis

Lösung: c)

BEGREIFE DIE WELT! 02

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:

Was hat Thomas Edison ↪ erfunden?

a) Das Auto
b) Die Heizung
c) Die elektrische Glühbirne
d) Das Fenster

Lösung: c)

BEGREIFE DIE WELT! 08/10

Um diese Karte zu gewinnen, schätzt die Antwort auf diese Frage:

Wie hoch ist durchschnittlich die normale Körpertemperatur beim Menschen?

Lösung: 36,3 °C und 37,4 °C. Alle Antworten zwischen 36 °C und 38 °C sind eine gute Schätzung.

BEGREIFE DIE WELT! 06

Um diese Karte zu gewinnen, löst folgende Aufgabe:

3 Eier benötigen 5 min bis sie hart gekocht sind. Wie lange brauchen 6 Eier?

Lösung: 5 min

BEGREIFE DIE WELT! 08

Um diese Karte zu gewinnen, schätzt die Antwort auf diese Frage:

Wie weit war der weiteste Speerwurf?

Lösung: 104,8 m. Alle Antworten zwischen 90 m und 120 m sind eine gute Schätzung.

BEGREIFE DIE WELT! 08

Um diese Karte zu gewinnen, schätzt die Antwort auf diese Frage:

Wie groß ist euer/eure Lehrer/in?

Alle Antworten die 5 cm von der richtigen größe abweichen sind eine gute Schätzung.

BEGREIFE DIE WELT! 12

Um diese Karte zu gewinnen, löst folgende Aufgabe:

Wie viele Stunden sind eine Woche?

Lösung: 168 h (7 • 24 h)

BEGREIFE DIE WELT! 08

Um diese Karte zu gewinnen, schätzt die Antwort auf diese Frage:

Wie groß ist die Fläche von Asien?

Lösung: 44.614.500 km². Alle Antworten zwischen 40.000.000 km² und 50.000.000 km² sind eine gute Schätzung.

BEGREIFE DIE WELT! 06

Um diese Karte zu gewinnen, löst folgende Aufgabe:

Josef sagt: „Von der Bushaltestelle bis zur Schule sind es 120 Schritte.“
Maria sagt:„Nein! 126 Schritte!“
Erkläre warum die beiden sich nicht einigen können.

Lösung: Sie haben verschiedene Schrittlängen.

BEGREIFE DIE WELT! 06

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Max feiert nur in jedem 4. Jahr seinen Geburtstag. Warum?

Lösung: Max hat am 29. Februar Geburtstag und kann somit nur im Schaltjahr ↪ feiern.

BEGREIFE DIE WELT! 10

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Wie viele Planeten gibt es in unserem Sonnensystem?

Lösung: 8 (Merkur, Venus, Erde, Mars, Jupiter, Saturn, Uranus, Neptun)

BEGREIFE DIE WELT! 08

Um diese Karte zu gewinnen, schätzt die Antwort auf diese Frage:

Wie lang ist ein Floh?

Lösung: Zwischen 1 mm und 4 mm.

BEGREIFE DIE WELT! 08

Um diese Karte zu gewinnen, schätzt die Antwort auf diese Frage:

Wie schnell ist das schnellste Tier der Welt?

Lösung: Der Wanderfalke mit einer bisher gemessenen Spitzengeschwindigkeit von 389 km/h. Alle Antworten zwischen 350 km/h und 430 km/h sind eine gute Schätzung.

BEGREIFE DIE WELT! 08

Um diese Karte zu gewinnen, schätzt die Antwort auf diese Frage:

Wie wahrscheinlich ist es, dass in einer Klasse mit 23 Schülern zwei beliebige Personen an demselben beliebigen Tag Geburtstag haben?

Lösung: 50,73 %. Alle Antworten zwischen 40 % und 60 % sind eine gute Schätzung. Geburtstagspardoxon ↪

BEGREIFE DIE WELT! 08

Um diese Karte zu gewinnen, schätzt die Antwort auf diese Frage:

Wie wahrscheinlich ist es, dass in einer Klasse mit 50 Schülern zwei beliebige Personen an demselben beliebigen Tag Geburtstag haben?

Lösung: 97,01 %. Alle Antworten zwischen 90 % und 99 % sind eine gute Schätzung. Geburtstagsparadoxon ↪

BEGREIFE DIE WELT! 13

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:

Eine besondere Eigenschaft des Goldenen Schnittes ↪ (1,618033…) ist, dass…
a) das Teilen von zwei aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen ↪ in etwa den Goldenen Schnitt ergibt.
b) er in der Natur verblüffend oft auftaucht.
c) 1 geteilt durch den Goldenen Schnitt = Goldener Schnitt minus 1.

Lösung: Alle 3 Antworten sind richtig. Der Goldene Schnitt ist übrigens die einzige Zahl, die die Eigenschaft c) erfüllt.

BEGREIFE DIE WELT! 08/13

Um diese Karte zu gewinnen, schätzt die Antwort auf diese Frage:

Auf wie viele Stellen genau hat man inzwischen (2016) die Kreiszahl Pi ↪ bestimmt?

Lösung: 22.459.157.718.361 (Mehr als 22 Billionen). Alle Antworten zwischen 15 Billionen und 30 Billionen sind eine gute Schätzung.

BEGREIFE DIE WELT! 03

Um diese Frage zu gewinnen, bewertet diese Aussage (richtig) als „wahr" oder „falsch".

Ob wir etwas als schön empfinden, hängt unter anderem mit der Geometrie zusammen.

Lösung: Wahr. Genauer gesagt mit Symmetrie und Proportionen.

BEGREIFE DIE WELT! 03/10

Um diese Frage zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:

Eine der effizientesten Formen, die in der Natur vorkommen, ist das

a) Sechseck
b) Quadrat
c) Dreieck

Lösung: a) Zum Beispiel sind Bienenwaben sechseckig. Der Vorteil: Man kann eine Fläche mit Sechsecken ohne Lücken überdecken, der Umfang ist dabei minimal.

BEGREIFE DIE WELT! 12

Um diese Karte zu gewinnen, nennt ein Beispiel aus dem Alltag, wo man diese mathematische Idee sinnvoll benutzen kann. Jeder vernünftige Vorschlag zählt!

Der Betrag

Beispiel: Abstände berechnen

BEGREIFE DIE WELT! 10

Um diese Karte zu gewinnen, nennt ein Beispiel aus dem Alltag, wo man diese mathematische Idee sinnvoll benutzen kann. Jeder vernünftige Vorschlag zählt!

Der Dreisatz

Beispiel: verschiedene Währungen umrechnen, Einheiten umrechnen

BEGREIFE DIE WELT! 03

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Welche beiden geometrischen Formen kann man auf einem Fußball finden?

Lösung: Regelmäßige Fünf- und Sechsecke

BEGREIFE DIE WELT! 09/11/12

Um diese Karte zu gewinnen, löst folgende Aufgabe:

Lilly will für ihre Freundinnen Punsch mischen. In ihre Schüssel passen 2,5 l, doch der Messbecher misst nur 500 ml. Wie oft muss sie den Messbecher auffüllen, um die Schüssel komplett zu füllen?

Lösung: 5 mal

BEGREIFE DIE WELT! 04

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Lisa schaut nach Norden. Sie macht eine Dreivierteldrehung nach rechts und dann eine halbe Drehung nach links. In welche Richtung schaut sie?

Lösung: Richtung Osten

BEGREIFE DIE WELT! 14

Um diese Karte zu gewinnen, löst folgende Aufgabe:

Mitten in der Nacht schleicht sich Lara in die Küche, um zu naschen. In einem Glas befinden sich 19 rote und 6 gelbe Gummibärchen. Wie wahrscheinlich ist es, dass sie ein rotes zieht?

Lösung: $\frac{19}{25}$ bzw. 76%

BEGREIFE DIE WELT! 08/12

Um diese Karte zu gewinne, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:

Aus 1/2 Tonne Mehl sollen Brote gebacken werden, die 1,5 kg wiegen. Wie viele Brote kann man ungefähr backen?

a) 100
b) 333
c) 999

Lösung: b) (500 kg : 1,5 kg = 333 ⅓)

BEGREIFE DIE WELT! 12

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Welche Masse ist größer:

1kg Blei oder 1kg Federn?

Lösung: Die beiden Massen sind gleichgroß.

BEGREIFE DIE WELT! 05

Um diese Karte zu gewinnen, bewertet folgende Aussage (richtig) mit „wahr“ oder „falsch“.

Es gibt nur endlich viele Primzahlen ↪.

Lösung: Falsch.

BEGREIFE DIE WELT! 11

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Welche Zeichen können für die Division benutzt werden?

Lösung: ⁄, —, :, ÷

FINDE ES HERAUS! 03

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:

Welcher Körper ist nicht spiegelsymmentrisch?

a) Trapez
b) Parallelogramm
c) Kreis
d) Quader

Lösung: b)

FINDE ES HERAUS! 16

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:

Genau wann ist eine Zahl gerade?

a) Wenn sie sich ohne Rest durch 3 teilen lässt.
b) Wenn sie sich ohne Rest durch 4 teilen lässt.
c) Wenn sie sich ohne Rest durch 0 teilen lässt.
d) Wenn sie sich ohne Rest durch 2 teilen lässt.

Lösung: d)

FINDE ES HERAUS! 06

Um diese Karte zu gewinnen, löst diese Aufgabe:

In einen Bus steigen 7 Leute ein und 4 aus.
Wie viele Leute sind noch im Bus?

Lösung: Das könnt ihr nicht wissen, da ihr nicht wisst, wie viele Leute im Bus waren, bevor die 7 eingestiegen sind.

FINDE ES HERAUS! 03

Um diese Karte zu gewinnen, erklärt den Unterschied zwischen diesen Dingen:

Parallelogramm und Trapez

Lösung: Bei einem Parallelogramm müssen die jeweils gegenüberliegenden Seiten parallel zueinander sein. Bei einem Trapez genügt es, wenn zwei Seiten parallel sind.

FINDE ES HERAUS! 09

Um diese Karte zu gewinnen, löst diese Aufgabe:

Familie Schneider fährt vom 7.8. bis 15.8. in den Urlaub. Wie viele Tage dauert ihre Reise (inklusive An- und Abreisetag)?

Lösung: 9 Tage

FINDE ES HERAUS! 07

Um diese Karte zu gewinnen, bewertet diese Aussage (richtig) mit „wahr“ oder „falsch“:

Das Ergebnis von $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$ ist größer als 1.

Lösung: Falsch ($\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12} < 1$)

FINDE ES HERAUS! 09/11

Um diese Karte zu gewinnen, löst diese Aufgabe:

Tom sagt: „Gestern bin ich um halb 10 ins Bett gegangen und heute um 7 wieder aufgestanden.“
Wie lange hat Tom geschlafen?

Lösung: 9,5 Stunden

FINDE ES HERAUS! 11

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:

Was ist ein Exponent?

a) Eine geometrische Figur
b) Ein Ausstellungsstück
c) Eine Hochzahl
d) Eine Primzahl ↪

Lösung: c) In der Gleichung $4^2 = 16$ ist 2 der Exponent.

FINDE ES HERAUS! 04/10

Um diese Karte zu gewinnen, löst diese Aufgabe:

Lisa zerschneidet ein Brot in 20 Scheiben. Wie oft muss sie schneiden?

Lösung: 19 mal

FINDE ES HERAUS! 03

Um diese Karte zu gewinnen, benennt die Beziehung zwischen diesen Dingen:

Rechteck und Quadrat

Lösung: Jedes Quadrat ist auch ein Rechteck.

FINDE ES HERAUS! 11

Um diese Karte zu gewinnen, findet den Fehler in dieser Rechnung:

$2 + 3 \cdot 5 = 25$

Lösung: Die Klammern wurden vergessen. Oder: Punkt vor Strich wurde missachtet.

FINDE ES HERAUS! 03

Um diese Karte zu gewinnen, benennt die Beziehung zwischen diesen Dingen:

Parallelogramm und Quadrat

Lösung: Jedes Quadrat ist auch ein Parallelogramm.

FINDE ES HERAUS! 03

Um diese Karte zu gewinnen, benennt die Beziehung zwischen diesen Dingen:

Parallelogramm und Trapez

Lösung: Jedes Parallelogramm ist auch ein Trapez.

FINDE ES HERAUS! 06

Um diese Karte zu gewinnen, löst diese Aufgabe:

Ein Schäfer hat 34 Schafe und 16 Ziegen. Wie alt ist er?

Lösung: Das kann man nicht wissen.

FINDE ES HERAUS! 16

Um diese Karte zu gewinnen, bewertet diese Aussage (richtig) mit „wahr“ oder „falsch“:

Jede gerade Zahl ist durch 2 teilbar.

Lösung: Wahr

FINDE ES HERAUS! 07

Um diese Karte zu gewinnen, findet den Fehler in dieser Rechnung:

$\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{10}$

Lösung: Die Nenner wurden auch addiert.

FINDE ES HERAUS! 10/13

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:

Woraus besteht ein Algorithmus ↪ ?

a) Aus Blaualgen
b) Aus Kommazahlen
c) Aus Tanzschritten
d) Aus Handlungsanweisungen

Lösung: d)

FINDE ES HERAUS! 06

Um diese Karte zu gewinnen, löst diese Aufgabe:

Mark ist älter als Gabi. Anne ist jünger als Gabi, aber älter als Julia. Wer ist am jüngsten?

Lösung: Julia

Finde es heraus! 15

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet diese Frage (richtig) mit „ja“ oder „nein“:

Gibt es eine kleinste Zahl?

Lösung: Nein. Von jeder Zahl kann man immer noch 1 subtrahieren und erhält eine kleinere Zahl.

Finde es heraus! 10

Um diese Frage zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:

Was ist ein Meridian ↪ ?

a) Ein Mittelwert
b) Ein spezieller Halbkreis auf der Erde
c) Ein Zauberer
d) Ein besonderer Zirkel

Lösung: b)

Finde es heraus! 06

Um diese Karte zu gewinnen, findet den Fehler in dieser Aussage:

Jong ist größer als Manfred. Manfred ist kleiner als Leila. Also ist Leila größer als Jong.

Lösung: Jong und Leila sind größer als Manfred. Ihr könnt aber nicht wissen, wer von beiden größer ist.

Finde es heraus! 06

Um diese Karte zu gewinnen, löst diese Aufgabe:

Lilli und Claudia sind Zwillingsschwestern. Lilli ist 15 Jahre alt. Wie alt ist Claudia?

Lösung: Claudia ist auch 15 Jahre alt, sie sind schließlich Zwillinge.

Finde es heraus! 05

Um diese Karte zu gewinnen, löst diese Aufgabe:

Gibt es gerade Primzahlen ↪ ?

Tipp: Primzahlen ↪ sind solche Zahlen, die ohne Rest nur durch sich selbst und durch 1 teilbar sind.

Lösung: Ja, denn 2 ist eine Primzahl ↪ .

Finde es heraus! 07

Um diese Karte zu gewinnen, findet den Fehler in dieser Rechnung:

$\frac{2}{3} + \frac{2}{4} = \frac{4}{7}$

Lösung: Die Brüche wurden nicht auf den gleichen Nenner gebracht oder die Nenner wurden auch addiert.

Finde es heraus! 15

Um diese Karte zu gewinnen, bewertet diese Aussage (richtig) mit „wahr“ oder „falsch“:

Man kann jede Zahl auf unterschiedliche Arten aufschreiben.

Lösung: Wahr (z.B. gilt $1 = \frac{2}{2} = \frac{8}{8} = \ldots$)

Finde es heraus! 11

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet diese Frage (richtig) mit „ja“ oder „nein“:

Ist Multiplizieren manchmal eine Abkürzung für Addieren?

Tipp: Denkt an die Multiplikation natürlicher Zahlen.

Lösung: Ja. $3 \cdot 5$ ist zum Beispiel eine Abkürzung für $5 + 5 + 5$.

Finde es heraus! 03

Um diese Karte zu gewinnen, bewertet diese Aussage (richtig) mit „wahr“ oder „falsch“:

Man kann jedes Viereck mit einer Linie in zwei Dreiecke teilen.

Lösung: Wahr

FINDE ES HERAUS! 15

Um diese Frage zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:

Was ist ein Median ↪ ?

a) Ein Mittelwert
b) Ein spezieller Kreis auf der Erde
c) Ein Zauberer
d) Ein besonderer Zirkel

Lösung: a)

FINDE ES HERAUS! 15

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:

Wie lautet die kleinste natürliche Zahl?

a) 0
b) -1
c) 1
d) Existiert nicht

Lösung: a) oder c).
Manche zählen die 0 zu den natürlichen Zahlen, andere nicht.

FINDE ES HERAUS! 06

Um diese Karte zu gewinnen, löst diese Aufgabe:

Alfred ist Berts Vater. Bert ist Christines Bruder. Wie ist Alfred mit Christines Sohn Dennis verwandt?

Lösung: Alfred ist Dennis' Großvater.
Oder: Dennis ist Alfreds Enkel(sohn).

FINDE ES HERAUS! 05

Um diese Karte zu gewinnen, löst diese Aufgabe:

2 ist eine gerade Primzahl ↪ . Gibt es weitere gerade Primzahlen ↪ ?

Tipp: Primzahlen ↪ sind solche Zahlen, die ohne Rest nur durch sich selbst und durch 1 teilbar sind.

Lösung: Nein. Diese Zahlen wären nämlich durch 2 teilbar und somit keine Primzahlen ↪ .

FINDE ES HERAUS! 07

Um diese Karte zu gewinnen, erklärt den Unterschied zwischen diesen Dingen:

Echter Bruch und unechter Bruch

Lösung: echter Bruch: der Zähler ist kleiner als der Nenner und die Zahl ist kleiner als 1
unechter Bruch: der Zähler ist größer als der Nenner

FINDE ES HERAUS! 15

Um diese Karte zu gewinnen, bewertet diese Aussage (richtig) mit „wahr" oder „falsch":

Auf Agnetas' Grabstein steht: „Sie lebte von 200 bis 145!" Ihre Lebensdaten sind natürliche Zahlen.

Lösung: Falsch, es sind negative Zahlen.

FINDE ES HERAUS! 13

Um diese Karte zu gewinnen, bewertet diese Aussage (richtig) mit „wahr" oder „falsch":

$1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100 = 101 \cdot 50?$

Lösung: Wahr, denn
$1 + 2 + \ldots + 100 = (1 + 100) + (2 + 99) + \ldots + (50 + 51) = 101 \cdot 50.$
Der kleine Gauß ↪

FINDE ES HERAUS! 03

Um diese Karte zu gewinnen, erklärt den Unterschied zwischen diesen Dingen:

Gerade und Strecke

Lösung: Eine Strecke hat einen Anfangs- und einen Endpunkt, eine Gerade hat weder Anfangs- noch Endpunkt.

FINDE ES HERAUS! 05

Um diese Karte zu gewinnen, löst diese Aufgabe:

Wie lässt sich 14 als Produkt zweier Primzahlen ↪ darstellen?

Lösung: 2 • 7 oder 7 • 2

FINDE ES HERAUS! 15

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet diese Frage (richtig) mit „ja“ oder „nein“:

Gibt es eine größte Zahl?

Lösung: Nein. Zu jeder Zahl kann man immer noch 1 addieren und erhält eine größere Zahl.

FINDE ES HERAUS! 15

Um diese Karte zu gewinnen, benennt die Beziehung zwischen diesen Dingen:

Ganze Zahlen und rationale Zahlen

Lösung: Jede ganze Zahl ist auch eine rationale Zahl.

FINDE ES HERAUS! 16

Um diese Karte zu gewinnen, bewertet diese Aussage (richtig) mit „wahr“ oder „falsch“:

Jede ungerade Zahl ist durch 3 teilbar.

Lösung: Falsch (z.B. 1, 5, 7)

FINDE ES HERAUS! 04/10

Um diese Karte zu gewinnen, löst diese Aufgabe:

Christian schneidet von einem Brot 7 Scheiben ab. Wie oft muss er schneiden?

Lösung: 7 mal

FINDE ES HERAUS! 13

Um diese Frage zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:

Was ist eine Wurzel?

a) Das untere Ende eines Zahnes
b) Die Umkehrung des Quadrierens
c) Das obere Ende eines Baumes
d) Eine Gleichungsart

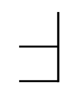
Lösung: a) und b)

FINDE ES HERAUS! 03

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Schreibt den Buchstaben F und spiegelt diesen zuerst nach rechts und dann nach unten. Was kommt dabei heraus?

Lösung:



FINDE ES HERAUS! 07

Um diese Karte zu gewinnen, löst diese Aufgabe:

$24 - \frac{24}{3}$

Tipp: kürzen

Lösung: 16

FINDE ES HERAUS! 11

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Was ist 10^{10} als Zahl?

Lösung: 10.000.000.000

FINDE ES HERAUS! 09/11

Um diese Karte zu gewinnen, löst folgende Aufgabe:

Wenn in eine Streichholzschachtel 83 Streichhölzer passen, wie viele Streichhölzer sind dann in 3 Schachteln?

Lösung: 249 Streichhölzer

Finde es heraus! 11

Um diese Karte zu gewinnen, löst folgende Aufgabe:

Multipliziert die kleinste und die zweitgrößte Zahl von den Zahlen 3, 7, 8, 9 und 11.

Lösung: 27.

Finde es heraus! 10

Um diese Karte zu gewinnen, löst folgende Aufgabe:

3 Würfel liegen übereinander, sodass oben eine 2 ist. Wie viele Augen kann man nicht sehen?

Tipp: Man kann den Würfelturm drehen.

Lösung: 19. Gegenüber der 2 ist immer eine 5.

Finde es heraus! 04/10

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Steh auf, drehe dich um 180° rechts herum, drehe dich um 90° gegen den Uhrzeigersinn, drehe dich um 270° im Uhrzeigersinn.
In welche Richtung schaust du?

Lösung: In dieselbe wie zuvor.

Finde es heraus! 07

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Wie viele Butterkekse passen in eine Verpackung von 62,5 g?

Tipp: Ein Butterkeks wiegt 6,25 g.

Lösung: 10

Finde es heraus! 09/11

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:

Eine Fliege hat 6 Beine, eine Spinne sogar 8. Zusammen haben 2 Fliegen und 3 Spinnen genau so viele Beine wie 10 Hühner und...
a) ...2 Katzen.
b) ...3 Katzen.
c) ...4 Katzen.

Lösung: c) (2 • 6 + 3 • 8 = 36 = 10 • 2 + 4 • 4)

Finde es heraus! 11

Um diese Karte zu gewinnen, löst folgende Aufgabe:

In einem Apfel sind 6 Kerne. Wie viele Kerne sind in 7 Äpfeln?

Lösung: 42

Finde es heraus! 08

Um diese Karte zu gewinnen, schätzt die Antwort auf diese Frage:

Ein Mittelfeldstürmer spielt bei einem Fußballspiel 90 min durch. Wie viele Kilometer legt er dabei ungefähr zurück?
a) 10 km
b) 3 km
c) 14 km
d) 20 km

Lösung: a)

Finde es heraus! 11

Um diese Karte zu gewinnen, löst folgende Aufgabe:

Ist die Aufgabe richtig oder nicht?

$$2 \cdot 3 - 4 + 11 = 14$$

Lösung: Nein (richtige Lösung: 13).

Finde es heraus! 03

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Ist es möglich ein Viereck mit drei Geraden zu bilden?

Lösung: Nein

Finde es heraus! 11

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Was ist größer: 96 oder das Quadrat von 9?

Lösung: 96 ($9^2 = 81$)

Finde es heraus! 13

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:

Die magische Zahl in einem magischem Quadrat ↪ mit den Zahlen 1 bis 9 ist immer
a) 9
b) 12
c) 15
d) 18

Lösung: c)

Finde es heraus! 03

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Wie viele Ecken ↪ hat ein Würfel?

Lösung: 8

Finde es heraus! 03

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

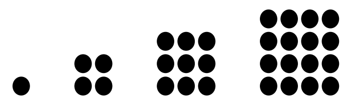
Wie viele Flächen hat ein Würfel?

Lösung: 6

Finde es heraus! 13

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Wie nennt man diese Zahlen?



Lösung: Quadratzahlen

Finde es heraus! 06

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Wie viele 2-stellige Zahlen gibt es, bei denen die Zehnerziffer echt größer ist als die Einerziffer?

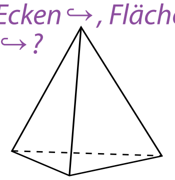
Lösung: 45 (10, 20, 21, 30, 31, 32, 40, 41, 42, 43,…)
$1 + 2 + \ldots + 9 = 45$

Finde es heraus! 03

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Wie viele Ecken ↪, Flächen und Kanten ↪ hat ein Tetraeder ↪?

Tipp:



Lösung: Ecken ↪: 4, Flächen: 4, Kanten ↪: 6

Finde es heraus! 16

Um diese Karte zu gewinnen, bewertet diese Aussage (richtig) mit „wahr“ oder „falsch“:

Jede gerade Zahl ist durch 5 teilbar.

Lösung: Falsch. Z.B. 8, 12, …

Finde es heraus! 05

Um diese Karte zu gewinnen, bewertet diese Aussage (richtig) mit „wahr“ oder „falsch“:

2 ist die einzige Primzahl ↪, die gerade ist.

Lösung: Wahr

FINDE ES HERAUS! 11

Um diese Karte zu gewinnen, löst folgende Aufgabe:

2007 : (2 + 0 + 0 + 7) - (2 • 0 • 0 • 7) = …

a) ...323
b) ...322
c) ...232
d) ...223

Lösung: d)

FINDE ES HERAUS! 05

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Welche dieser Zahlen ist eine Primzahl ↪ :

2, 10, 12, 15, 18?

Lösung: 2

FINDE ES HERAUS! 14

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Warum ist die Summe eines Wurfs mit zwei Würfeln öfter 7 als 12?

Lösung: Für die 7 gibt es mehr Möglichkeiten, als für die 12.
7: (1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)
12: (6,6)

FINDE ES HERAUS! 15

Um diese Karte zu gewinnen,…

…sortiert die folgenden Zahlen der Größe nach:
46, IX, 2, 73, CIV

Lösung: 2, IX, 46, 72, CIV

FINDE ES HERAUS! 03

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Wie viel Grad hat ein rechter Winkel?

Lösung: 90°

FINDE ES HERAUS! 03

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Es hat 3 Ecken ↪ und man kann mit ihm messen. Von was ist die Rede?

Lösung: das Geodreieck

FINDE ES HERAUS! 13

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Wie sieht die nächste Zeile in folgendem Zahlendreieck aus?

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

Lösung: 1 5 10 10 5 1
Pascalsches Dreieck ↪

FINDE ES HERAUS! 06

Um diese Karte zu gewinnen, löst folgende Aufgabe:

Wie groß ist das maximale Produkt der Augenzahlen auf gegenüberliegenden Seiten eines Würfels?

Lösung: 12 (3 • 4)

FINDE ES HERAUS! 06/09

Um diese Karte zu gewinnen, löst folgende Aufgabe:

Eine Busfahrerin fährt mit einem leeren Bus zu einer Station. Es steigen 10 Menschen ein und an der nächsten Station 5 Menschen aus.
Wie viele Leute sind noch im Bus?

Lösung: 6 (inklusive dem Busfahrer)

FINDE ES HERAUS! 03

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Ist es möglich zwei Geraden zu zeichnen, die sich nicht schneiden und nicht dieselbe Gerade sind?

Lösung: Ja, wenn sie parallel sind.

FINDE ES HERAUS! 03

Um diese Karte zu gewinnen, löst folgende Aufgabe:

Findet in diesem Raum drei rechte Winkel!

FINDE ES HERAUS! 11

Um diese Karte zu gewinnen, löst folgende Aufgabe:

Wie viele Beine haben 6 Pferde?

Lösung: 24

FINDE ES HERAUS! 06

Um diese Karte zu gewinnen, löst folgende Aufgabe:

Die Zahl selbst + ihre Hälfte + ihr Doppeltes ergibt 28.
Wie lautet die gesuchte Zahl?

Lösung: 8

FINDE ES HERAUS! 06

Um diese Karte zu gewinnen, …

…findet die Zahl in der Lücke:
3, __ , 12, 24, 48
Begründet eure Antwort!

Lösung: 6 (man nimmt immer mal 2 bzw. das Doppelte)

FINDE ES HERAUS! 13/14

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:

Vier Kinder sitzen an einem Tisch. Wie viele verschiedene Möglichkeiten von Anordnungen gibt es?
a) 12
b) 10
c) 16
d) 24

Lösung: d) (Fakultät →)

FINDE ES HERAUS! 03

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Wie viele Spiegelachsen hat ein Quadrat?

Lösung: 4

FINDE ES HERAUS! 06

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

In einer Schulklasse mit 29 Kindern befinden sich 5 Mädchen mehr als Jungen. Wie viele Mädchen sind es?

Lösung: 17

FINDE ES HERAUS! 06

Um diese Karte zu gewinnen,…

…denkt sich das gegnerische Team eine ganze Zahl aus. Versucht diese Zahl zu erraten, indem ihr Fragen stellt. Das andere Team darf dabei nur mit „ja" und „nein" antworten.

FINDE ES HERAUS! 03

Um diese Karte zu gewinnen, löst folgende Aufgabe:

Ich bin ein Körper, habe 5 Ecken↪ und bestehe fast nur aus Dreiecken.
Wer bin ich?

Lösung: Eine Pyramide

FINDE ES HERAUS! 09/11

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Peter spielt am Tag 2 h und 30 min. Wie viele Stunden spielt Peter in einer Woche?

Lösung: 17 h 30 min

FINDE ES HERAUS! 06

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Julia und Sina sind zusammen 26 Jahre alt. Julia ist 4 Jahre älter als Sina.
Wie alt sind die beiden?

Lösung: Sina ist 11 Jahre alt und Julia 15.

FINDE ES HERAUS! 03

Um diese Karte zu gewinnen, bewertet diese Aussage (richtig) mit „wahr" oder „falsch":

Ich bin ein Quader und habe 8 Ecken↪. Da sich an jeder Ecke↪ 3 Kanten↪ befinden, habe ich 8 • 3 = 24 Kanten↪.

Lösung: Falsch. Der Quader hat nur 12 Kanten↪, da die Ecken↪ gemeinsame Kanten↪ haben.

FINDE ES HERAUS! 06

Um diese Karte zu gewinnen,…

…findet die Zahl in der Lücke:
100, 81, 64, __ .
Begründet eure Antwort!

Lösung: 49 (-19, -17, -15,…)

FINDE ES HERAUS! 11

Um diese Karte zu gewinnen, löst folgende Aufgabe:

Ergänzt die folgenden Zahlen zu 50000:
a) 4700
b) 32000
c) 11111
d) 33200
e) 27000
Es reichen 3 richtige Antworten.

Lösung: a) 45300, b) 18000, c) 38889, d) 16800, e) 23000

FINDE ES HERAUS! 06

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Was hat 21 Augen und bringt nicht immer Glück?

Lösung: der Würfel

FINDE ES HERAUS! 11

Um diese Karte zu gewinnen, löst folgende Aufgabe:

Ergänzt die folgenden Zahlen zu 1000:

a) 463
b) 515
c) 156
d) 333

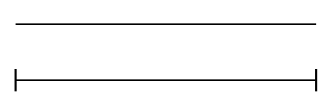
Lösung: a) 537, b) 485, c) 844, d) 667

FINDE ES HERAUS! 03

Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:

Was ist eine Gerade?

a)
b)



Lösung: a) Eine Gerade hat weder Anfang, noch Ende.

FINDE ES HERAUS! 03

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Was beschreibt die Zahl Pi↪ (π)?

Lösung: Das Verhältnis des Umfangs eines Kreises zu seinem Durchmesser.

FINDE ES HERAUS! 03

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Wofür braucht man die Zahl Pi↪ (π)?

Lösung: Zur Berechnung des Umfangs und des Flächeninhalts eines Kreises.

FINDE ES HERAUS! 13/14

Um diese Karte zu gewinnen, löst folgende Aufgabe:

Anna zieht 2 Kugeln aus eine Urne, in der sich 3 Kugeln befinden. Es gibt 1 rote, 1 gelbe und 1 grüne Kugel
Wie viele Farbkombinationen sind möglich?

Lösung: 3 (rot und gelb, rot und grün, grün und gelb)

FINDE ES HERAUS! 13

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Gibt es eine Zahl, die nichts verändert, wenn ich sie addiere?

Lösung: Ja, die 0. Denn $5 + 0 = 5$. Neutrales Element↪

FINDE ES HERAUS! 13

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Gibt es eine Zahl, die nichts verändert, wenn ich sie multipliziere?

Lösung: Ja, die 1. Denn $3 \cdot 1 = 3$. Neutrales Element↪

FINDE ES HERAUS! 05

Um diese Karte zu gewinnnen, löst folgende Aufgabe:

Schreibt die Zahl 12 nur mit Primzahlen↪.

Lösung: $2 \cdot 2 \cdot 3$ oder $5 + 7$

FINDE ES HERAUS! 05

Um diese Karte zu gewinnnen, löst folgende Aufgabe:

Schreibt die Zahl 15 nur mit Primzahlen↪.

Lösung: $3 \cdot 5$ oder $7 + 5 + 3$

FINDE ES HERAUS! 13

Um diese Karte zu gewinnen, löst folgende Aufgabe:

Findet 3 natürliche Zahlen für x, y und z, die folgende Gleichung erfüllen:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Beispiel: (3,4,5), (5,12,13), (8,15,17)
Pythagoreisches Tripel↪

FINDE ES HERAUS! 15

Um diese Karte zu gewinnen, bewertet diese Aussage (richtig) mit „wahr“ oder „falsch“:

Jede natürliche Zahl ist auch eine ganze Zahl.

Lösung: Wahr. Die natürlichen Zahlen sind gerade die positiven ganzen Zahlen.

FINDE ES HERAUS! 15

Um diese Karte zu gewinnen, bewertet diese Aussage (richtig) mit „wahr“ oder „falsch“:

Jede ganze Zahl ist auch eine natürliche Zahl.

Lösung: Falsch. -13 ist zum Beispiel eine ganze, aber keine natürliche Zahl.

FINDE ES HERAUS! 15

Um diese Karte zu gewinnen, bewertet diese Aussage (richtig) mit „wahr“ oder „falsch“:

Jede natürliche Zahl ist auch eine rationale Zahl.

Lösung: Wahr. Jede natürliche Zahl kann auch als Bruch geschrieben werden: $2 = \frac{2}{1}$, $5 = \frac{5}{1}$, …

FINDE ES HERAUS! 13

Um diese Karte zu gewinnen, bewertet diese Aussage (richtig) mit „wahr“ oder „falsch“:

Multipliziert man zwei ungeraden Zahlen, so ergibt das wieder eine ungerade Zahl.

Lösung: Wahr

FINDE ES HERAUS! 13

Um diese Karte zu gewinnen, bewertet diese Aussage (richtig) mit „wahr“ oder „falsch“:

Addiert man zwei ungeraden Zahlen, so ergibt das wieder eine ungerade Zahl.

Lösung: Falsch. Zum Beispiel ergibt $5 + 7 = 12$.

FINDE ES HERAUS! 16

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Sind diese beiden Zahlen durch 2 teilbar?

1346 und 9051

Lösung: 1346 ist durch 2 teilbar, 9051 nicht.

FINDE ES HERAUS! 16

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Ist diese Zahl durch 6 teilbar?

789346

Lösung: Nein. Die Zahl ist zwar gerade (und somit durch 2 teilbar), die Quersumme ↪ beträgt aber 37, was nicht durch 3 teilbar ist.

FINDE ES HERAUS! 16

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Ist diese Zahl durch 6 teilbar?

123456

Lösung: Ja. Sie ist gerade und die Quersumme ↪ beträgt 21.

FINDE ES HERAUS! 16

Um diese Karte zu gewinnnen, beantwortet folgende Frage:

Ist diese Zahl durch 5 oder durch 10 teilbar?

355

Lösung: Nur durch 5, da hinten keine 0 steht.

FINDE ES HERAUS! 16

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Ist diese Zahl durch 5 oder durch 10 teilbar?

350

Lösung: Durch beide Zahlen.

FINDE ES HERAUS! 16

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Ist diese Zahl durch 9 teilbar?

600000000000003

Lösung: Ja, denn die Quersumme ↪ ist durch 9 teilbar.

FINDE ES HERAUS! 07

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Welche Zahl ist größer?

$\frac{5}{9}$ oder $\frac{6}{10}$

Lösung: $\frac{6}{10}$

FINDE ES HERAUS! 12

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Was ist der Betrag von -(-3)?

Lösung: 3

FINDE ES HERAUS! 12

Um diese Karte zu gewinnen, bewertet diese Aussage (richtig) mit „wahr“ oder „falsch“:

Der Betrag einer Zahl kann negativ sein.

Lösung: Falsch. Der Betrag einer Zahl gibt ihren Abstand zur Null an und ist somit immer positiv.

FINDE ES HERAUS! 15

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Wie viele rationale Zahlen liegen zwischen 0 und 1?

Lösung: Unendlich viele. Teile das Intervall unendlich oft und du erhälst immer wieder eine rationale Zahl, die zwischen 0 und 1 liegt.

FINDE ES HERAUS! 15

Um diese Karte zu gewinnen, bewertet diese Aussage (richtig) mit „wahr“ oder „falsch“:

Zwischen zwei rationalen Zahlen liegen unendlich viele rationale Zahlen.

Lösung: Wahr

FINDE ES HERAUS! 15

Um diese Karte zu gewinnen, bewertet diese Aussage (richtig) mit „wahr“ oder „falsch“:

Zwischen zwei rationalen Zahlen liegen unendlich viele ganze Zahlen.

Lösung: Falsch. Zum Beispiel liegen im Intervall von $-\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{2}$ nur die ganzen Zahlen 0 und 1.

FINDE ES HERAUS! 11

Um diese Karte zu gewinnen, bewertet diese Aussage (richtig) mit „wahr“ oder „falsch“:

Potenzen ↪ sind eine Kurzschreibweise eines Produkts.

Lösung: Wahr. Nämlich des Produkts von einer Zahl mit sich selbst.

FINDE ES HERAUS! 11

Um diese Karte zu gewinnen, löst folgende Aufgabe:

Was ergibt:

a) 13^2
b) 15^2
c) 18^2 ?

Lösung: a) 169
b) 225
c) 324

FINDE ES HERAUS! 11

Um diese Karte zu gewinnen, löst folgende Aufgabe:

Findet eine andere Darstellung für

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

Lösung: 36

FINDE ES HERAUS! 11

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Kann man bei der Multiplikation die Reihenfolge der Zahlen beliebig vertauschen?

Lösung: Ja, denn $3 \cdot 5 = 15 = 5 \cdot 3$

FINDE ES HERAUS! 11

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Kann man bei der Subtraktion die Reihenfolge der Zahlen beliebig vertauschen?

Lösung: Nein, denn $7 - 5 = 2 \neq -2 = 5 - 7$

FINDE ES HERAUS! 06/13

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Welche Zahl muss in die Lücke, damit die Rechnung stimmt?

$$5 + 3 \cdot (4 - \_\_) = 11$$

Lösung: 2

FINDE ES HERAUS! 06/13

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Welche Zahl muss in die Lücke, damit die Rechnung stimmt?

$$(2 + 43 \cdot (-12) - 14 : 6 + 1) \cdot \_\_ = 0$$

Lösung: 0

FINDE ES HERAUS! 14

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Was ist das Maximum in dieser Zahlenreihe?

$$0{,}01;\ 0{,}009;\ 0{,}2^2;\ -3$$

Lösung: $0{,}2^2$

FINDE ES HERAUS! 14

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Was ist das Minimum in dieser Zahlenreihe?

$$0{,}01;\ 0{,}009;\ 0{,}2^2;\ -3$$

Lösung: -3

FINDE ES HERAUS! 10/12

Um diese Karte zu gewinnen, löst folgende Aufgabe:

Rechnet 3,7 h in Minuten um.

Lösung: 180 min + 42 min = 222 min

FINDE ES HERAUS! 09/10

Um diese Karte zu gewinnen, löst folgende Aufgabe:

Lena fährt mit ihrem Fahrrad in 2 h 38 km weit. Wie weit ist sie nach 3 h gekommen?

Lösung: 57 km

Finde es heraus! 09/10

Um diese Karte zu gewinnen, löst folgende Aufgabe:

12 ausgewachsene Packesel können auf einer Route 480 kg tragen. Wie viel Esel braucht man, um 280 kg zu transportieren?

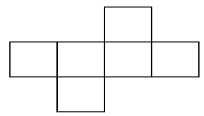
Lösung: 7 Esel

Finde es heraus! 03/04

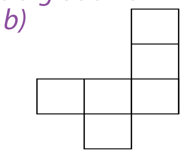
Um diese Karte zu gewinnen, entscheidet euch für die richtige Antwort auf diese Frage:

Welches der beiden Netze ergibt einen Würfel?

a)



b)

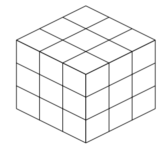


Lösung: a)

Finde es heraus! 04

Um diese Karte zu gewinnen, löst folgende Aufgabe:

Wie viele kleine Würfel brauchst du für diese Figur?



Lösung: 3 • 3 • 3 = 27. (Es würden auch schon 26 reichen, da man den Würfel in der Mitte weglassen kann.)

Finde es heraus! 13

Um diese Karte zu gewinnen, löst folgende Aufgabe:

1 + 1 - 1 + 1 - 1 + … = ?

Wie lautet das Ergebnis nach dem zwanzigsten Rechenschritt?

Lösung: 1

Finde es heraus! 11

Um diese Karte zu gewinnen,…

…macht aus der Rechnung durch Klammern eine wahre Aussage:

2 • 4 - 3 + 11 = 13

Beispiel: 2 • (4 - 3) + 11 = 13

Finde es heraus! 10

Um diese Karte zu gewinnen,…

…schreibt die Zahl 1784 als römische Zahl.

Lösung: MDCCLXXXIV

Finde es heraus! 13/14

Um diese Karte zu gewinnen, löst folgende Aufgabe:

Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es für 3 Personen sich auf 3 Stühle zu setzen?

Lösung: 6 Möglichkeiten (Fakultät ↪)

Finde es heraus! 13/14

Um diese Karte zu gewinnen, löst folgende Aufgabe:

Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es für 4 Autos sich in 4 freie Parklücken zu stellen.

Lösung: 24 Möglichkeiten (Fakultät ↪)

Finde es heraus! 12

Um diese Karte zu gewinnen, löst folgende Aufgabe:

Euer Klassenzimmer ist 5m lang, 5m breit und 4m hoch. Wie viel Liter Wasser passen in euer Klassenzimmer?

Lösung: 100.000 Liter

FINDE ES HERAUS! 12

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Bei einem Quiz musst du 6 Fragen in 3,5 min beantworten. Wie viel Zeit (in Sekunden) hast du durchschnittlich für eine Frage?

Lösung: 35s (210s : 6)

FINDE ES HERAUS! 11/12

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Wenn 150g Gurken 25ct kosten, wie viele Gurken bekommst du für 1€?

Lösung: 600g (150g • 4)

FINDE ES HERAUS! 05

Um diese Karte zu gewinnen, bewertet diese Aussage (richtig) mit „wahr“ oder „falsch“:

Es gibt eine Primzahl ↪, die ich als Produkt von zwei natürlichen Zahlen, die echt größer ↪ als 1 sind, schreiben kann.

Lösung: Falsch. Das würde der Definition von Primzahlen ↪ widersprechen.

FINDE ES HERAUS! 14

Um diese Karte zu gewinnen, bewertet diese Aussage (richtig) mit „wahr“ oder „falsch“:

Der Mittelwert liegt immer in der Mitte der größten und der kleinsten Zahl.

Lösung: Falsch. Ein Gegenbeispiel wäre der Mittelwert der Zahlen 2, 5, 14.

FINDE ES HERAUS! 13/14

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Welche Möglichkeiten gibt es, die Zahl 4 beim Würfeln mit zwei Würfeln zu erhalten?

Lösung: (1,3), (3,1), (2,2)

FINDE ES HERAUS! 13/14

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Welche Möglichkeiten gibt es, die Zahl 11 beim Würfeln mit zwei Würfeln zu erhalten?

Lösung: (5,6), (6,5)

FINDE ES HERAUS! 13/14

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Welche Möglichkeiten gibt es, die Zahl 7 beim Würfeln mit zwei Würfeln zu erhalten?

Lösung: (1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)

FINDE ES HERAUS! 13/14

Um diese Karte zu gewinnen, beantwortet folgende Frage:

Welche Möglichkeiten gibt es, die Zahl 4 beim Würfeln mit drei Würfeln zu erhalten?

Lösung: (1,1,2), (1,2,1), (2,1,1)

FINDE ES HERAUS! 13/14

Um diese Karte zu gewinnen,…

…nennt vier Möglichkeiten, die Zahl 11 beim Würfeln mit drei Würfeln zu erhalten.

Beispiel: (1,5,5), (2,4,5), (3,3,5), (3,4,4)

FINDE ES HERAUS! 13/14

Um diese Karte zu gewinnen,…

…nennt vier Möglichkeiten, die Zahl 7 beim Würfeln mit drei Würfeln zu erhalten.

Beispiel: (1,1,5), (1,2,4), (1,3,3), (2,2,3), (3,3,1)

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 07

Um diese Karte zu gewinnen, stelle diesen Begriff pantomimisch dar. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche machen.

Der Bruch

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 07

Um diese Karte zu gewinnen, stelle diesen Begriff pantomimisch dar. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche machen.

Der Bruchstrich

Tipp: Taucht in Rechnungen auf.

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 15

Um diese Karte zu gewinnen, stelle diesen Begriff pantomimisch dar. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche machen.

Irrational ↪

Tipp: Es geht um Zahlen.

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 03

Um diese Karte zu gewinnen, erkläre diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst weder das Wort selbst, Teile davon, noch die verbotenen Wörter verwenden.

Der stumpfe Winkel

Verboten: groß, breit, dick

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 03

Um diese Karte zu gewinnen, zeichne diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche und keine Gesten (erklärende Bewegungen) machen.

Der Würfel

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 15

Um diese Karte zu gewinnen, stelle diesen Begriff pantomimisch dar. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche machen.

Die negative Zahl

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 03

Um diese Karte zu gewinnen,…

…denke dir eine geometrische Figur aus und flüstere uns ihren Namen ins Ohr. Deine Mannschaft muss die Figur erraten und stellt dir dazu Fragen, die du nur mit ja oder nein beantworten darfst.

Beispiele: Herz, Dreieck, Kugel, ...

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 03

Um diese Karte zu gewinnen, erkläre diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst weder das Wort selbst, Teile davon, noch die verbotenen Wörter verwenden.

Recktwinklig

Verboten: Viereck, Quadrat

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 07

Um diese Karte zu gewinnen, zeichne diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche und keine Gesten (erklärende Bewegungen) machen.

Der Kehrwert

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 12

Um diese Karte zu gewinnen, zeichne diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche und keine Gesten (erklärende Bewegungen) machen.

Das Runden

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 03

Um diese Karte zu gewinnen, erkläre diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst weder das Wort selbst, Teile davon, noch die verbotenen Wörter verwenden.

Der Kreis

Verboten: rund, Quadrat, Radius

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 03

Um diese Karte zu gewinnen, stelle diesen Begriff pantomimisch dar. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche machen.

Der Kreis

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 03

Um diese Karte zu gewinnen, stelle diesen Begriff pantomimisch dar. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche machen.

Der Quader

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 10/14

Um diese Karte zu gewinnen, stelle diesen Begriff pantomimisch dar. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche machen.

Der Durchschnitt

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 07

Um diese Karte zu gewinnen, erkläre diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst weder das Wort selbst, Teile davon, noch die verbotenen Wörter verwenden.

Der Kehrwert

Verboten: oben, unten, über, unter

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 12

Um diese Karte zu gewinnen, zeichne diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche und keine Gesten (erklärende Bewegungen) machen.

Der Maßstab

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 03

Um diese Karte zu gewinnen, erkläre diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst weder das Wort selbst, Teile davon, noch die verbotenen Wörter verwenden.

Der Winkel

Verboten: klein, groß, Ecke

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 06

Um diese Karte zu gewinnen,…

...denke dir eine Zahl aus und flüstere uns ihren Namen ins Ohr. Deine Mannschaft muss die Zahl erraten und stellt dir dazu Fragen, die du nur mit ja oder nein beantworten darfst.

Tipp: Es könnte helfen, nach Teilbarkeit zu fragen.

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 07

Um diese Karte zu gewinnen, zeichne diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche und keine Gesten (erklärende Bewegungen) machen.

Das Kürzen

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 05

Um diese Karte zu gewinnen, zeichne diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche und keine Gesten (erklärende Bewegungen) machen.

Die Primzahl ↪

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 14

Um diese Karte zu gewinnen, zeichne diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche und keine Gesten (erklärende Bewegungen) machen.

Das Volumen

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 12

Um diese Karte zu gewinnen, stelle diesen Begriff pantomimisch dar. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche machen.

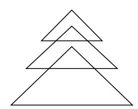
Das Runden

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 03

Um diese Karte zu gewinnen, zeichne diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche und keine Gesten (erklärende Bewegungen) machen.

Tannenbaum aus 5 Dreiecken

Beispiel:



MACH DICH VERSTÄNDLICH! 11

Um diese Karte zu gewinnen, stelle diesen Begriff pantomimisch dar. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche machen.

Das Produkt

Tipp: Es geht um Rechenoperationen.

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 03

Um diese Karte zu gewinnen, zeichne diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche und keine Gesten (erklärende Bewegungen) machen.

Das Prisma

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 11

Um diese Karte zu gewinnen, erkläre diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst weder das Wort selbst, Teile davon, noch die verbotenen Wörter verwenden.

Der Quotient ↪

Verboten: teilen, malnehmen, rechnen

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 10

Um diese Karte zu gewinnen, stelle diesen Begriff pantomimisch dar. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche machen.

Das Doppelte

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 07

Um diese Karte zu gewinnen, zeichne diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche und keine Gesten (erklärende Bewegungen) machen.

Der Bruch

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 10

Um diese Karte zu gewinnen, stelle diesen Begriff pantomimisch dar. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche machen.

Die Hälfte

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 11

Um diese Karte zu gewinnen, stelle diesen Begriff pantomimisch dar. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche machen.

Die Differenz

Tipp: Es geht um Rechenoperationen.

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 07

Um diese Karte zu gewinnen, zeichne diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche und keine Gesten (erklärende Bewegungen) machen.

Periodisch

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 03

Um diese Karte zu gewinnen, erkläre diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst weder das Wort selbst, Teile davon, noch die verbotenen Wörter verwenden.

Der Grad

Verboten: Temperatur, dick, dünn

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 16

Um diese Karte zu gewinnen, stelle diesen Begriff pantomimisch dar. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche machen.

Die Quersumme ↪

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 16

Um diese Karte zu gewinnen, zeichne diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche und keine Gesten (erklärende Bewegungen) machen.

Die Quersumme ↪

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 11

Um diese Karte zu gewinnen, erkläre diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst weder das Wort selbst, Teile davon, noch die verbotenen Wörter verwenden.

Die Differenz

Verboten: plus, minus, rechnen

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 07

Um diese Karte zu gewinnen, stelle diesen Begriff pantomimisch dar. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche machen.

Das Kürzen

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 03

Um diese Karte zu gewinnen, stelle diesen Begriff pantomimisch dar. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche machen.

Der Grad

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 03

Um diese Karte zu gewinnen, stelle diesen Begriff pantomimisch dar. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche machen.

Das gleichschenklige Dreieck

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 03

Um diese Karte zu gewinnen, stelle diesen Begriff pantomimisch dar. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche machen.

Der spitze Winkel

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 03

Um diese Karte zu gewinnen, erkläre diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst weder das Wort selbst, Teile davon, noch die verbotenen Wörter verwenden.

Das Geodreieck

Verboten: Viereck, Vieleck, Länge

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 03

Um diese Karte zu gewinnen, erkläre diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst weder das Wort selbst, Teile davon, noch die verbotenen Wörter verwenden.

Das Dreieck

Verboten: 4, 5, 6, Punkt, Seite

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 07

Um diese Karte zu gewinnen, erkläre diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst weder das Wort selbst, Teile davon, noch die verbotenen Wörter verwenden.

Der Bruch

Verboten: halb, Strich, Kommazahl

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 03

Um diese Karte zu gewinnen, erkläre diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst weder das Wort selbst, Teile davon, noch die verbotenen Wörter verwenden.

Der Würfel

Verboten: gleiche Seitenlänge, Quadrat, Quader

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 11

Um diese Karte zu gewinnen, stelle diesen Begriff pantomimisch dar. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche machen.

Die Division

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 11

Um diese Karte zu gewinnen, stelle diesen Begriff pantomimisch dar. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche machen.

Die Addition

Tipp: Du darfst die gegnerische Mannschaft zur Hilfe nehmen.

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 03

Um diese Karte zu gewinnen, stelle diesen Begriff pantomimisch dar. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche machen.

Der rechte Winkel

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 03

Um diese Karte zu gewinnen, erkläre diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst weder das Wort selbst, Teile davon, noch die verbotenen Wörter verwenden.

Der gestreckte Winkel

Verboten: Grad, Winkel

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 03

Um diese Karte zu gewinnen, stelle diesen Begriff pantomimisch dar. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche machen.

Die Gerade

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 10

Um diese Karte zu gewinnen, erkläre diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst weder das Wort selbst, Teile davon, noch die verbotenen Wörter verwenden.

Römische Zahlen

Verboten: Römer, V, X

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 15

Um diese Karte zu gewinnen, stelle diesen Begriff pantomimisch dar. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche machen.

Die Zahl 2

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 11

Um diese Karte zu gewinnen, erkläre diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst weder das Wort selbst, Teile davon, noch die verbotenen Wörter verwenden.

Die Zehnerpotenz ↪

Verboten: Hochzahl, Faktor, Zehn

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 03

Um diese Karte zu gewinnen, stelle diesen Begriff pantomimisch dar. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche machen.

Der Würfel

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 03

Um diese Karte zu gewinnen,…

…erklärt wie man mit einem Zirkel Längen messen kann.

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 03

Um diese Karte zu gewinnen, stelle diesen Begriff pantomimisch dar. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche machen.

Das Dreieck

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 12

Um diese Karte zu gewinnen, stelle diesen Begriff pantomimisch dar. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche machen.

Der Betrag

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 12

Um diese Karte zu gewinnen, erkläre diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst weder das Wort selbst, Teile davon, noch die verbotenen Wörter verwenden.

Der Betrag

Verboten: positiv, negativ, minus

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 11

Um diese Karte zu gewinnen, stelle diesen Begriff pantomimisch dar. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche machen.

Die Potenz ↪

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 11

Um diese Karte zu gewinnen, erkläre diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst weder das Wort selbst, Teile davon, noch die verbotenen Wörter verwenden.

Der Exponent

Verboten: Potenz ↪ *, Basis, Hochzahl*

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 11

Um diese Karte zu gewinnen, stelle diesen Begriff pantomimisch dar. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche machen.

Die Basis

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 14

Um diese Karte zu gewinnen, stelle diesen Begriff pantomimisch dar. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche machen.

Das Maximum

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 14

Um diese Karte zu gewinnen, erkläre diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst weder das Wort selbst, Teile davon, noch die verbotenen Wörter verwenden.

Das Minimum

Verboten: Maximum, kleinste Zahl

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 16

Um diese Karte zu gewinnen, stelle diesen Begriff pantomimisch dar. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche machen.

Teilen

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 16

Um diese Karte zu gewinnen, zeichne diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche und keine Gesten (erklärende Bewegungen) machen.

Teilen

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 16

Um diese Karte zu gewinnen, erkläre diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst weder das Wort selbst, Teile davon, noch die verbotenen Wörter verwenden.

Der größte gemeinsame Teiler (ggT) ↪

Verboten: kgV (kleinstes gemeinsames Vielfaches ↪), teilen

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 16

Um diese Karte zu gewinnen, erkläre diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst weder das Wort selbst, Teile davon, noch die verbotenen Wörter verwenden.

Das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) ↪

Verboten: ggT (größter gemeinsamer Teiler ↪), multiplizieren

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 16

Um diese Karte zu gewinnen, erkläre diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst weder das Wort selbst, Teile davon, noch die verbotenen Wörter verwenden.

Nicht teilbar

Verboten: teilen, dividieren, Rest

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 14

Um diese Karte zu gewinnen, stelle diesen Begriff pantomimisch dar. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche machen.

Der Mittelwert

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 14

Um diese Karte zu gewinnen, zeichne diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche und keine Gesten (erklärende Bewegungen) machen.

Das Maximum

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 14

Um diese Karte zu gewinnen, erkläre diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst weder das Wort selbst, Teile davon, noch die verbotenen Wörter verwenden.

Der Mittelwert

Verboten: Durchschnitt, addieren, teilen

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 14

Um diese Karte zu gewinnen, zeichne diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche und keine Gesten (erklärende Bewegungen) machen.

Das Minimum

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 14

Um diese Karte zu gewinnen, stelle diesen Begriff pantomimisch dar. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche machen.

Das Minimum

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 15

Um diese Karte zu gewinnen, erkläre diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst weder das Wort selbst, Teile davon, noch die verbotenen Wörter verwenden.

Die natürlichen Zahlen

Verboten: ganze Zahlen, rationale Zahlen, 1,2,3,…

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 15

Um diese Karte zu gewinnen, erkläre diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst weder das Wort selbst, Teile davon, noch die verbotenen Wörter verwenden.

Die ganzen Zahlen

Verboten: natürliche Zahlen, rationale Zahlen, negativ

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 15

Um diese Karte zu gewinnen, stelle diesen Begriff pantomimisch dar. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche machen.

Die Zahlengerade

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 12

Um diese Karte zu gewinnen, erkläre diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst weder das Wort selbst, Teile davon, noch die verbotenen Wörter verwenden.

Milli

Verboten: Tausend, Maßeinheit

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 12

Um diese Karte zu gewinnen, erkläre diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst weder das Wort selbst, Teile davon, noch die verbotenen Wörter verwenden.

Centi

Verboten: Hundert, Maßeinheit

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 12

Um diese Karte zu gewinnen, erkläre diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst weder das Wort selbst, Teile davon, noch die verbotenen Wörter verwenden.

Dezi

Verboten: Zehn, Maßeinheit

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 12

Um diese Karte zu gewinnen, erkläre diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst weder das Wort selbst, Teile davon, noch die verbotenen Wörter verwenden.

Kilo

Verboten: Gramm, Maßeinheit

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 14

Um diese Karte zu gewinnen, stelle diesen Begriff pantomimisch dar. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche machen.

Säulendiagramm

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 14

Um diese Karte zu gewinnen, stelle diesen Begriff pantomimisch dar. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche machen.

Kreisdiagramm

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 14

Um diese Karte zu gewinnen, zeichne diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche und keine Gesten (erklärende Bewegungen) machen.

Balkendiagramm

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 14

Um diese Karte zu gewinnen, zeichne diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche und keine Gesten (erklärende Bewegungen) machen.

Streifendiagramm

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 07

Um diese Karte zu gewinnen, stelle diesen Begriff pantomimisch dar. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche machen.

Abbrechende Dezimalzahl

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 07

Um diese Karte zu gewinnen, erkläre diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst weder das Wort selbst, Teile davon, noch die verbotenen Wörter verwenden.

Erweitern

Verboten: Bruch, Nenner

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 07

Um diese Karte zu gewinnen, stelle diesen Begriff pantomimisch dar. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche machen.

Kürzen

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 03

Um diese Karte zu gewinnen, erkläre diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst weder das Wort selbst, Teile davon, noch die verbotenen Wörter verwenden.

π ↪

Verboten: Zahl, irrational ↪, *Kreis*

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 03

Um diese Karte zu gewinnen, stelle diesen Begriff pantomimisch dar. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche machen.

Parallel

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 03

Um diese Karte zu gewinnen, stelle diesen Begriff pantomimisch dar. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche machen.

Achsensymmetrisch

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 03

Um diese Karte zu gewinnen, stelle diesen Begriff pantomimisch dar. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche machen.

Punktsymmetrisch

MACH DICH VERSTÄNDLICH! 03

Um diese Karte zu gewinnen, stelle diesen Begriff pantomimisch dar. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst dabei keine Geräusche machen.

Koordinatensystem ↪

Mach dich verständlich! 03

Um diese Karte zu gewinnen, erkläre diesen Begriff. Deine Mannschaft muss den Begriff erraten. Du darfst weder das Wort selbst, Teile davon, noch die verbotenen Wörter verwenden.

Koordinatensystem ↪

Verboten: zeichnen, Punkte, Achsen

9. Literaturverzeichnis

Aguilar, M. S., Rosas, A., Zavaleta, J. G. M., & Romo-Vázquez, A. (2016). EXPLORING HIGH-ACHIEVING STUDENTS'IMAGES OF MATHEMATICIANS. *International Journal of Science and Mathematics Education, 14*(3), 527-548.

Baker, A., Oh Navarro, E., & Van Der Hoek, A. (2005). An experimental card game for teaching software engineering processes. *Journal of Systems and Software, 75*(1-2), 3-16. doi:10.1016/j.jss.2004.02.033

Bloom, B. S., Engelhart, M. D., & Füner, E. (1973). *Taxonomie von Lernzielen im kognitiven Bereich*: Beltz Weinheim, Germany.

Botticchio, M., & Vialle, W. J. (2009). *Creativity and flow theory: Reflections on the talent development of women*. Paper presented at the International Conference on the Cultivation and Education of Creativity and Innovation, Xi'an, China: Institute of Psychology of Chinese Academy of Sciences.

Boyle, E. A., Hainey, T., Connolly, T. M., Gray, G., Earp, J., Ott, M., . . . Pereira, J. (2016). An update to the systematic literature review of empirical evidence of the impacts and outcomes of computer games and serious games. *Computers & Education, 94*, 178-192. doi:10.1016/j.compedu.2015.11.003

Breuer, J., & Bente, G. (2010). Why So Serious? On the Relation of Serious Games and Learning. *Journal for Computer Game Culture, 4*(1), 7-24.

Brookes, I., Bulhosen, P., Bullon, S., Cleveland Marwick, K., Combley, R., Delahunty, A., . . . Wedgeworth, L. (Eds.). (2014) Collins English dictionary (12 ed.). Glasgow: HarperCollins.

Bruner, J. S. (1974). *Entwurf einer Unterrichtstheorie*. Berlin: Cornelsen.

Buehl, M. M., & Alexander, P. A. (2005). Motivation and performance differences in students' domain-specific epistemological belief profiles. *American Educational Research Journal, 42*(4), 697-726.

Chi, M. T., De Leeuw, N., Chiu, M.-H., & LaVancher, C. (1994). Eliciting self-explanations improves understanding. *Cognitive science, 18*(3), 439-477.

Csikszentmihalyi, M. (1996). *Creativity. Flow and the psychology of discovery and invention*. New York: Harper Collins.

Dary, T., Pickeral, T., Shumer, R., & Williams, A. (2016). Weaving Student Engagement into the Core Practices of Schools. *National Dropout Prevention Center/Network*.

Deci, E. L., & Ryan, R. M. (1993). Die Selbstbestimmungstheorie der Motivation und ihre Bedeutung für die Pädagogik. *Zeitschrift für Pädagogik, 39*(2), 223-238.

Depaepe, F., De Corte, E., & Verschaffel, L. (2016). Mathematical epistemological beliefs. In J. Greene, W. Sandoval, & I. Braten (Eds.), *Handbook of epistemic cognition* (pp. 147-165): Routledge, Taylor and Francis Group.

Deterding, S., Khaled, R., Nacke, L., & Dixon, D. (2011). *Gamification: Toward a definition*. Paper presented at the CHI (Conference on Human Factors in Computing Systems), Vancouver.

Echeverría, A., García-Campo, C., Nussbaum, M., Gil, F., Villalta, M., Améstica, M., & Echeverría, S. (2011). A framework for the design and integration of collaborative classroom games. *Computers & Education, 57*(1), 1127-1136. doi:10.1016/j.compedu.2010.12.010

Ernest, P. (1986). Games. A rationale for their use in the teaching of mathematics in school. *Mathematics in school, 15*(1), 2-5.

Ernest, P. (2004). *The Philosophy of Mathematics Education*: Taylor & Francis e-Library.

Fischer, U., Moeller, K., Huber, S., Cress, U., & Nuerk, H.-C. (2015). Full-body movement in numerical trainings: a pilot study with an interactive whiteboard. *International Journal of serious games, 2*(4), 23-35.
Gagné, R. M. (1980). *Die Bedingungen des menschlichen Lernens* (B. Meyer & H. Skowronek, Trans.). Hannover, Dortmund, Darmstadt, Berlin: Hermann Schroedel Verlag KG.
Gasteiger, H. (2013). *Förderung elementarer mathematischer Kompetenzen durch Würfelspiele-Ergebnisse einer Interventionsstudie.* Paper presented at the Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, Münster.
Giessen, H. W. (2015). Serious Games Effects: An Overview. *Procedia - Social and Behavioral Sciences, 174*, 2240-2244. doi:10.1016/j.sbspro.2015.01.881
Girard, C., Ecalle, J., & Magnan, A. (2013). Serious games as new educational tools: how effective are they? A meta-analysis of recent studies. *Journal of Computer Assisted Learning, 29*(3), 207-219. doi:10.1111/j.1365-2729.2012.00489.x
Graham, S., & Weiner, B. (1996). Theories and principles of motivation. *Handbook of educational psychology, 4*, 63-84.
Grigutsch, S. (1997). Mathematische Weltbilder von Schülern Struktur, Entwicklung, Einflußfaktoren. *Journal für Mathematik-Didaktik, 18*(2-3), 253-254.
Hainey, T., Connolly, T. M., Boyle, E. A., Wilson, A., & Razak, A. (2016). A systematic literature review of games-based learning empirical evidence in primary education. *Computers & Education, 102*, 202-223. doi:10.1016/j.compedu.2016.09.001
Heinz, F. (2018). *Mathematische Lernspiele als diagnostisches Instrument: Spiele im heterogenen Mathematikunterricht der Grundschule zur Erfassung von Lernhürden*. Wiesbaden: Springer Fachmedien.
Hofer, B. K., & Pintrich, P. R. (1997). The Development of Epistemological Theories: Beliefs About Knowledge and Knowing and Their Relation to Learning. *Review of educational research, 67*(1), 88-140. doi:10.3102/00346543067001088
Homann, G. (1995). *Mathematik - Lernspiele*. Braunschweig: Westermann.
Hosemann, E. (1999). Kann das Verstehen naturwissenschaftlicher Fachbegriffe durch den Einsatz von Lernspielen verbessert werden? *PFL-Naturwissenschaften*(46).
Johnson, D. W., Johnson, R. T., & Stanne, M. B. (2000). Cooperative learning methods: A meta-analysis. In. Minneapolis: University of Minnesota.
Käpnick, F. (2014). Lernspiele im Grundschulmathematikunterricht. In *Mathematiklernen in der Grundschule* (pp. 175-186). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
Ke, F., & Grabowski, B. (2007). Gameplaying for maths learning: cooperative or not? *British Journal of Educational Technology, 38*(2), 249-259.
Kienhues, D., Bromme, R., & Stahl, E. (2008). Changing epistemological beliefs: The unexpected impact of a short-term intervention. *British Journal of Educational Psychology, 78*(4), 545-565.
Kiili, K., Devlin, K., & Multisilta, J. (2015). Editorial: is Game-Based Math Learning Finally Coming of Age? *International Journal of serious games, 2*. doi:10.17083/ijsg.v2i4.109
Köller, O. (2001). Mathematical world views and achievement in advanced mathematics in Germany: findings from TIMSS population 3. *Studies in Educational Evaluation, 27*(1), 65-78. doi:10.1016/S0191-491X(01)00014-1
Lämsä, J., Hämäläinen, R., Aro, M., Koskimaa, R., & Äyrämö, S.-M. (2018). Games for enhancing basic reading and maths skills: A systematic review of educational game design in supporting learning by people with learning disabilities. *British Journal of Educational Technology, 49*(4), 596-607. doi:0.1111/bjet.12639

Liu, P.-H. (2009). HISTORY AS A PLATFORM FOR DEVELOPING COLLEGE STUDENTS'EPISTEMOLOGICAL BELIEFS OF MATHEMATICS. *International Journal of Science and Mathematics Education, 7*(3), 473-499.

Marsh, T. (2011). Serious games continuum: Between games for purpose and experiential environments for purpose. *Entertainment Computing, 2*(2), 61-68. doi:10.1016/j.entcom.2010.12.004

Mason, L., & Scrivani, L. (2004). Enhancing students' mathematical beliefs: An intervention study. *Learning and instruction, 14*(2), 153-176.

McConkey, R., & McEvoy, J. (2007). Games for Learning to Count. *British Journal of Special Education, 13*(2), 59-62. doi:10.1111/j.1467-8578.1986.tb00655.x

Michael, D. R., & Chen, S. L. (2005). *Serious games: Games that educate, train, and inform*. Canada: Thomson Course Technology PTR.

Ministeriums für Kultus, J. u. S. B.-W. (2016). *Bildungsplan des Gymnasiums - Mathematik*. Stuttgart: Neckar-Verlag GmbH

Muis, K. R. (2004). Personal epistemology and mathematics: A critical review and synthesis of research. *Review of educational research, 74*(3), 317-377.

Nakamura, J., & Csikszentmihalyi, M. (2014). The concept of flow. In *Flow and the foundations of positive psychology* (pp. 239-263): Springer.

Newmann, F. M. (1992). *Student engagement and achievement in American secondary schools*. New York: Teachers College Press.

Niedermann, C., Schoch Niesser, R., & Interkantonale Hochschule für Heilpädagogik, Z. (2010). *Mathematische Lernspiele : eine theoretische Abhandlung und vier didaktisch analysierte Würfelspiele.* Hochschule für Heilpädagogik, Zürich.

Ninaus, M., Kiili, K., McMullen, J., & Moeller, K. (2017). Assessing fraction knowledge by a digital game. *Computers in Human Behavior, 70*, 197-206. doi:10.1016/j.chb.2017.01.004

Ninaus, M., Pereira, G., Stefitz, R., Prada, R., Paiva, A., Neuper, C., & Wood, G. (2015). Game elements improve performance in a working memory training task. *International Journal of serious games, 2*. doi:10.17083/ijsg.v2i1.60

Op't Eynde, P., De Corte, E., & Verschaffel, L. (2002). Framing students' mathematics-related beliefs. In *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 13-37): Springer.

Oxland, K. (2004). *Gameplay and design*: Pearson Education.

Paulsen, M. B., & Feldman, K. A. (1999). Student Motivation and Epistemological Beliefs. *New directions for teaching and learning, 78*, 17-25.

Picker, S. H., & Berry, J. S. (2000). Investigating pupils' images of mathematicians. *Educational Studies in Mathematics, 43*(1), 65-94.

Plass, J. L., Homer, B. D., & Kinzer, C. K. (2015). Foundations of Game-Based Learning. *Educational Psychologist, 50*(4), 258-283. doi:10.1080/00461520.2015.1122533

Plass, J. L., O'Keefe, P. A., Homer, B. D., Case, J., Hayward, E. O., Stein, M., & Perlin, K. (2013). The impact of individual, competitive, and collaborative mathematics game play on learning, performance, and motivation. *Journal of Educational Psychology, 105*(4), 1050.

Popp, S. (1990). Das Lernspiel im Unterricht. *Pädagogische Welt: Monatsschrift für Erziehung, Bildung, Schule, 44*(7), 306-311.

Ramani, G. B., & Siegler, R. S. (2008). Promoting Broad and Stable Improvements in Low-Income Children's Numerical Knowledge Through Playing Number Board Games. *Child Development, 79*(2), 375-394. doi:10.1111/j.1467-8624.2007.01131.x

Ramani, G. B., Siegler, R. S., & Hitti, A. (2012). Taking it to the classroom: Number board games as a small group learning activity. *Journal of Educational Psychology, 104*(3), 661-672. doi:10.1037/a0028995

Randel, J. M., Morris, B. A., Douglas Wetzel, C., & Whitehall, B. V. (1992). The Effectiveness of Games for Educational Purposes: A Review of Recent Research. *Simulation & Gaming, 23*(3), 261-276. doi:10.1177/1046878192233001

Retter, H. (2003). *Einführung in die Pädagogik des Spiels*. Braunschweig: TU Braunschweig.

Rolka, K., & Halverscheid, S. (2011). Researching young students' mathematical world views. *ZDM, 43*(4), 521-533.

Roungas, B. (2016). A Model-driven Framework for Educational Game Design. *International Journal of serious games, 3*. doi:10.17083/ijsg.v3i3.126

Schaub, H., & Zenke, K. G. (Eds.). (1995) Wörterbuch zur Pädagogik. München: dtv.

Simon, H. A. (1988). Creativity and motivation: A response to Csikszentmihalyi. *New Ideas in Psychology, 6*(2), 177-181.

Slavin, R. E. (1980). Cooperative learning. *Review of educational research, 50*(2), 315-342.

Slavin, R. E. (1983). When does cooperative learning increase student achievement? *Psychological bulletin, 94*(3), 429-445.

Strobach, T., & Wendt, M. (2018). *Allgemeine Psychologie: ein Überblick für Psychologiestudierende und-interessierte* (T. Strobach Ed.). Hamburg: Springer-Verlag.

Susi, T., Johannesson, M., & Backlund, P. (2007). Serious Games - An Overview.

Tehrani, T. (2009). *Das Lernspiel als Träger mathematischer Lernprozesse im Anfangsunterricht*. Hamburg: Igel Verlag.

Tschacher, W., & Storch, M. (2012). Die Bedeutung von embodiment für Psychologie und Psychotherapie. *Psychotherapie in Psychiatrie, Psychotherapeutischer Medizin und Klinischer Psychologie, 17*(2), 259-267.

Tubach, D. (2019). *Relationales Zahlverständnis im Übergang von der Kita zur Grundschule*. Dortmund: Springer Spektrum.

Wilson, M. (2002). Six views of embodied cognition. *Psychonomic bulletin & review, 9*(4), 625-636.

Wilson, R. A., & Foglia, L. (2013). Embodied cognition. *WIREs Cognitive Science, 4*, 319-325. doi:10.1002/wcs.1226

Wirtz, M. A., & Strohmer, J. (2014). *Dorsch-Lexikon der Psychologie* (17 ed.). Bern: Hogrefe AG.

Wong, W. L., Shen, C., Nocera, L., Carriazo, E., Tang, F., Bugga, S., . . . Ritterfeld, U. (2007). *Serious video game effectiveness*. Paper presented at the Proceedings of the international conference on Advances in computer entertainment technology, Salzburg, Austria.

Young-Loveridge, J. M. (2004). Effects on early numeracy of a program using number books and games. *Early Childhood Research Quarterly, 19*(1), 82-98. doi:10.1016/j.ecresq.2004.01.001

Danksagung

Zur Anfertigung dieser Wissenschaftlichen Arbeit haben zahlreiche Personen durch ihre fachliche und persönliche Unterstützung beigetragen. Ihnen möchte ich an dieser Stelle danken.

Mein besonderer Dank geht an meine Betreuerin, Frau Prof. Dr. Carla Cederbaum, die mich zu jeder Zeit voll unterstützt und mir viele Möglichkeiten eröffnet hat.

Weiterhin bedanke ich mich bei Bettina Bündgen, Claudia Boeru-Vlas und Susanne Frische, die mir ihre Unterrichtsstunden zur Verfügung gestellt haben. Auch möchte ich mich bei den Schülern bedanken, die motiviert am Spiel teilgenommen haben und uns Rückmeldungen gegeben haben, wodurch wir das Spiel verbessern konnten.

Ebenso geht mein Dank an Lisa Hilken, die die Wissenschaftliche Arbeit auf Formulierungs- und Schreibfehler überprüft hat.

Als letztes möchte ich mich bei meinen Eltern, meiner Schwester Bettina und meinen Freunden für ihre emotionale und moralische Unterstützung bedanken.

„Ich erkläre, dass ich die Arbeit selbständig angefertigt und nur die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe. Alle Stellen, die dem Wortlaut oder dem Sinn nach anderen Werken, gegebenenfalls auch elektronischen Medien, entnommen sind, sind von mir durch Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht. Entlehnungen aus dem Internet sind durch Angabe der Quelle und des Zugriffsdatums sowie dem Ausdruck der ersten Seite belegt; sie liegen zudem für den Zeitraum von 2 Jahren entweder auf einem elektronischen Speichermedium im PDF-Format oder in gedruckter Form vor."

23.08.2019

Datum

Unterschrift